



Bernardo de Freitas Telo Simões

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

**Otimização de topologia de treliças baseado no
conceito de *Ground Structure* considerando a
encurvadura das barras**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso, Professor
Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade
Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Doutora Raquel Albuquerque Soares Brás de Almeida
Vogais: Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho
Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso

Setembro de 2019



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Otimização de topologia de treliças baseado no conceito de *Ground Structure* considerando a encurvadura das barras

Copyright © Bernardo de Freitas Telo Simões, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

The best investment
you can make,
is investment in yourself...
The more you learn
The more you'll earn

- Warren Buffet-

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostava de agradecer ao Prof. Dr. João Cardoso pela orientação prestada, os esclarecimentos dados, a sua disponibilidade e até mesmo pelo seu ultimato quanto à velocidade de execução da dissertação.

Em segundo à minha família, especialmente aos meus pais, por toda motivação e ajuda que me deram não só ao longo da realização da dissertação, mas também ao longo do curso.

Por último, mas não menos importantes agradeço aos meus amigos Daniel Ferreira, João Horta e Bernardo Abrantes não só pelos bons como também pelos maus momentos que passamos juntos ao longo destes anos por toda a ajuda, apoio e momentos de loucura que prestaram.

Resumo

A presente dissertação aborda o tema de otimização de topologia utilizando o método de *Ground Structure* considerando a encurvadura nos elementos das treliças.

A encurvadura (flexão lateral) é um fenómeno que ocorre nas estruturas quando os seus elementos são sujeitos a forças de compressão elevadas nomeadamente superiores à chamada carga crítica determinada por Euler, que é a carga máxima que os elementos suportam antes de começarem a encurvar.

Relativamente à otimização utilizou-se a otimização de topologia com o conceito de *Ground Structure*, porque é específico para estruturas reticuladas (treliças).

O objetivo foi criar um método simplificado que tivesse em conta a encurvadura dos elementos num problema de otimização e com interesse a nível prático.

Utilizou-se o fator de redução χ do Eurocódigo 3 parte 1.1 porque as suas curvas de dimensionamento aproximavam-se da curva da carga crítica de Euler.

Para se realizar uma análise de elementos finitos e cálculo de sensibilidades criou-se o programa PROAES_Barra2D, o qual permite realizar análises lineares e não lineares. Este programa teve como base o PROAES que foi um programa desenvolvido no DEMI. A diferença de um para o outro é que o PROAES só realiza análises lineares e como a encurvadura apresenta um comportamento não linear criou-se PROAES_Barra2D que conta com a implementação do método criado na presente dissertação de forma a realizar ambas as análises para treliças em duas dimensões.

Os problemas de otimização foram resolvidos com recurso ao PROAES_Barra2D em conjunto com a *toolbox (optimtool)* do MATLAB.

A utilização destes dois programas permitiu a obtenção de excelentes resultados.

Conclui-se assim que o método implementado foi o correto e ideal pois, permite a obtenção de bons resultados e que apresentam interesse prático.

Palavras-chave: Otimização Topológica, *Ground Structure*, Encurvadura, SQP (*Sequential Quadratic Program*)

Abstract

The present dissertation addresses the topic of topology optimization using the *Ground Structure* method, considering the buckling of the truss elements.

Buckling (lateral bending) is a phenomenon that occurs in structures when their elements are subjected to high compression forces, which are higher than the so-called critical load computed by Euler, which is the maximum load supported by the elements before buckling begins to occur.

Regarding the optimization, topology optimization with the *Ground Structure* method is used, because it is specific to lattice structures (trusses).

The goal was to create a simplified method that takes into account the instability of the elements in an optimization problem and has interest at the practical level.

Use of the reduction factor χ of Eurocode 3 part 1.1 was made, because the approximate sizing curves follow the Euler critical load curve.

To perform finite element analysis and calculate sensitivities the PROAES_Barra2D program is created, to perform linear and non-linear analyses. This program was based on PROAES which was a program developed in DEMI. A difference from one case to another is that PROAES only performs linear analyses. PROAES_Barra2D implements the method developed in this dissertation in order to perform optimization of two-dimensional lattices.

Optimization problems have been solved with the PROAES_Barra2D program in conjunction with the MATLAB toolbox (*optimtool*).

Using these two programs has provided excellent results.

In conclusion, the implemented method was the correct and ideal one, as it allows to achieve good results and has the practical interest.

Keywords: Topology Optimization, *Ground Structure*, Buckling, SQP (*Sequential Quadratic Program*)

Índice

1. Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos da Dissertação	1
1.3 Estrutura da Dissertação	3
2. Otimização	5
2.1 Otimização Estrutural	6
2.2 Otimização de Dimensões	8
2.3 Otimização de Forma	9
2.4 Otimização de Topologia	9
2.4.1. Exemplos de otimização	10
3. Encurvadura	15
3.1 Fenómeno de Encurvadura	15
3.2 Encurvadura geral	15
3.3 Encurvadura local	17
3.4 Encurvadura lateral torsional	17
4. Metodologia	21
4.1. PROAES e <i>Optimtool</i>	21
4.2. Projeto de uma estrutura considerando o fenómeno da encurvadura e utilizando o Eurocódigo	23
4.3. Implementação da Análise Não Linear	29
4.3.1. Análise de Elementos Finitos	31
4.3.2. Sensibilidades	31
4.3.3. Exemplo de verificação	33
5. Estruturas otimizadas	41
5.1. Exemplo 1	41
5.2. Exemplo 2	44
5.3. Exemplo 3	46
6. Conclusões e sugestões de desenvolvimentos futuros	51
7. Referências Bibliográficas	53

Índice de Figuras

Figura 2.1-Interação das três categorias de otimização na conceção de um projeto extraído de [17].....	8
Figura 2.2-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]	8
Figura 2.3-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]	9
Figura 2.4-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]	9
Figura 2.5-Exemplos de Ground Structures extraído de [18].....	10
Figura 2.6.-Exemplo de configurações que uma estrutura toma durante a otimização pelo método Ground Structure extraído de [18]	10
Figura 2.7-Ground Structure extraído de [19]	11
Figura 2.8-Estrutura otimizada extraído de [19]	11
Figura 2.9-Ground Structure extraído de [20]	12
Figura 2.10-Estrutura otimizada extraído de [20]	13
Figura 2.11Ground Structure extraído de [21]	13
Figura 2.12-Estrutura otimizada extraído de [21]	14
Figura 3.1-Encurvadura dos elementos de uma estrutura extraído de [4]	15
Figura 3.2-Coluna curta e a respetiva deformação extraída de [4].....	16
Figura 3.3-Coluna esbelta e a respetiva deformação extraída de [4].....	16
Figura 3.4-Coluna intermédia e a respetiva deformação extraída de [4].....	17
Figura 3.5-Exemplo de encurvadura de uma viga em I extraído de [4]	17
Figura 3.6-Representação da zona de tração e de compressão extraído de [4]	18
Figura 3.7-Exemplo de encurvadura lateral torsional de uma viga em I extraído de [4]	18
Figura 3.8-Restrição lateral intermitente de uma viga em I extraído de [4].....	19
Figura 3.9-Restrição de torção de uma viga em I extraído de [4]	19
Figura 4.1-Diagrama de execução do PROAES adaptado de [22].....	21
Figura 4.2-Esquema de funcionamento do PROAES adaptado de [22].....	22
Figura 4.3-Exemplo de uma coluna sujeita a um carregamento axial de compressão e a sua deformação.....	24
Figura 4.4-Variação do valor da harmónica adaptado de [4]	25
Figura 4.5-Variação do comprimento de encurvadura em função dos diferentes tipos de apoios extraído de [23]	27
Figura 4.6-Curvas de dimensionamento do Eurocódigo 3 extraído de [23].....	28
Figura 4.7-Comportamento linear e não linear extraído de [24]	29
Figura 4.8-Exemplo de verificação	33
Figura 4.9-Diferenças finitas progressivas	35

Figura 4.10-Gráfico das derivadas (deriv) de uma análise linear (vermelho) e não linear (azul) em função da área (A).....	37
Figura 4.11-Gráfico da esbelteza normalizada (λ_{bn}) em função da área (A).....	37
Figura 4.12-Gráfico de $\chi(Q_i)$ em função da área (A)	38
Figura 4.13-Esquema de funcionamento do PROAES_Barra2D	39
Figura 5.1-Ground Structure 1	41
Figura 5.2-Estrutura 1 otimizada realizando uma análise linear	42
Figura 5.3-Estrutura 1 otimizada realizando uma análise não linear	42
Figura 5.4-Ground Structure 2	44
Figura 5.5-Estrutura 2 otimizada realizando uma análise linear	45
Figura 5.6-Estrutura 2 otimizada realizando uma análise não linear	45
Figura 5.7-Ground Structure 3	47
Figura 5.8-Estrutura 3 otimizada realizando uma análise linear	48
Figura 5.9-Estrutura 3 otimizada realizando uma análise não linear	48

Índice de Tabelas

Tabela 5.1-Áreas otimizadas da Ground Structure 1.....	43
Tabela 5.2-Áreas otimizadas da Ground Structure 2.....	46
Tabela 5.3-Áreas otimizadas da Ground Structure 3.....	49

Siglas e Símbolos

$f(\mathbf{x})$	Função objetivo
$g_j(\mathbf{x})$	Constrangimentos de desigualdade
$h_k(\mathbf{x})$	Constrangimentos de igualdade
x_i^l	Valor mínimo da variável de projeto
x_i^u	Valor máximo da variável de projeto
C	Flexibilidade (<i>compliance</i>)
α_p	Coefficiente de peso da robustez
V	Volume
A	Área de secção transversal
d_k	Deslocamento nodal
δ	Deslocamento infinitesimal
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
σ	Tensão
σ_c	Tensão de cedência
σ_{cr}	Tensão crítica
P	Carregamento
L	Comprimento do elemento
L_e	Comprimento de encurvadura
I	Momento de Inercia
M	Momento de flexão
E	Módulo de <i>Young</i>
i	Raio de giração
λ	Esbelteza
$\bar{\lambda}$	Esbelteza normalizada

χ	(Qi) Factor de redução
N_{rd}	Esforço axial resistente de uma coluna
α	Coefficiente de imperfeição
ψ	Performance estrutural
X_i	Variáveis de projeto
ΔX	Perturbação
t	Espessura
C_1, C_2	Constante

1. Introdução

1.1 Motivação

A análise estrutural tem como principal função o estudo do comportamento das estruturas sujeitas a carregamentos e um fenómeno que habitualmente não é tido em conta na obtenção de uma estrutura ótima é o da encurvadura, isto porque, é difícil de tratar pois está associado a um comportamento não linear [1].

A natureza é não linear. Mas a nossa forma de pensar tende a ser linear. Isto não é necessariamente um inconveniente, já que a linearização de um problema permite-nos resolver problemas complexos e encontrar soluções através da sobreposição de resultados conhecidos de problemas simples [2].

No campo das estruturas, a análise linear permite-nos obter uma aproximação do comportamento real das estruturas a qual nos ajuda a compreender o seu modo de funcionamento. Durante muito tempo o projeto de estruturas foi buscar inspiração ao seu comportamento linear, até mesmo o dimensionamento e a verificação da segurança eram essencialmente baseados na análise elástica linear e no conceito de tensão de segurança [2].

Contudo, sendo os resultados obtidos aproximados dos reais, por vezes surgem inconvenientes, nomeadamente um que é o sobredimensionamento das estruturas. Ao sobre dimensionar uma estrutura esta irá ser composta por mais material o que torna o projeto mais dispendioso.

Numa primeira abordagem o problema em estudo deve sempre passar por uma análise linear, para se ter um ponto de referência na realização de uma posterior análise não linear, isto porque, em geral as aproximações de uma análise linear à não linear fazem sentido até um determinado carregamento [3], posteriormente devem ser considerados os comportamentos não lineares para o problema em estudo.

O matemático Leonard Euler em 1757 desenvolveu uma teoria para análise de estruturas que falhavam devido à encurvadura [4]. A teoria desenvolvida baseava-se numa equação diferencial que representava a deformação elástica de uma coluna fixa, através do momento de flexão e da curvatura da coluna ao longo de todo o seu comprimento sujeito a um carregamento axial que após simplificações matemáticas conseguiu obter o método de calcular o valor de carga crítica, isto é, o valor máximo suportado por uma coluna antes de começar a encurvar.

Sendo a encurvadura um fenómeno que influencia a obtenção da estrutura ótima, na presente dissertação decidiu-se contabilizar a possibilidade de ocorrer encurvadura e assim criar um método analítico que permita resolver problemas de otimização estrutural de treliças mais especificamente otimização de topologia.

As treliças são bastante utilizadas num largo espectro de sectores de engenharia como a engenharia aeroespacial, mecânica, civil, etc., e a topologia das mesmas torna-se indispensável

para explorar os seus potenciais [5]. Na otimização de topologia aplicada a treliças é geralmente utilizado o método de *Ground Structure* [6].

Apesar de já se terem realizado problemas de otimização de topologia com restrições quanto à estabilidade local baseados na teoria de Euler [1] [7] [8] apenas para os elementos que se encontravam à compressão, conclui-se que as estruturas obtidas poderiam vir a ser instáveis. Ben-Tal [9] e Kocvara [10] incluíram uma única restrição a toda a estrutura relativamente à estabilidade global da mesma considerando que apresentava um comportamento linear. A encurvadura linear é baseada na suposição de que as não-linearidades geométricas são insignificantes e esta suposição pode levar à estimativa incorreta das cargas críticas se as deformações reais forem grandes [11]. Portanto, é necessário utilizar modelos geometricamente não lineares na análise de estabilidade para determinar com precisão as cargas críticas. No entanto, isso levará a um sistema não linear, e a solução de equilíbrio de tal sistema tem que ser caracterizada em relação aos pontos críticos, incluindo bifurcação e pontos limite. Essa análise não-linear também é bastante significativa, uma vez que irá capturar naturalmente o comportamento não-linear de sistemas de treliça sob grandes deformações [6].

O porquê de se desenvolver este método é devido ao facto de que, se o conceito *Ground Structure* for aplicado com análises lineares não tem em conta a variação da rigidez [12] devido à encurvadura, o que por vezes conduz na estrutura otimizada a barras com áreas de secção transversal muito pequenas que podem levar a resultados irreais [13] e conduz a estruturas instáveis que não têm interesse prático.

1.2 Objetivos da Dissertação

A presente dissertação tem como objetivo principal desenvolver assim uma metodologia para realizar otimização de topologia com o método de *Ground Structure* considerando a possibilidade de existir encurvadura. Para isso desenvolveu-se um método simplificado de penalizar a excessiva esbeltez das barras. Num problema de otimização em que a sua formulação tem como objetivo a minimização dos deslocamentos com constrangimentos de volume, procurou-se penalizar (aumentar) os deslocamentos quando a esbelteza das barras aumentava, foi então criado um programa PROAES_Barra2D que em conjunto com o MATLAB permite realizar problemas de otimização de duas dimensões com elementos do tipo barra de acordo com o Eurocódigo 3 parte 1.1 que permite obter resultados com interesse prático.

1.3 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em seis capítulos. No capítulo 1 apresenta-se uma introdução ao tema bem como a motivação que a levou a ser realizada e os objetivos a serem alcançados.

No capítulo 2 é apresentada a revisão de literatura sobre a otimização estrutural e as suas variantes, a otimização de dimensões, a otimização de forma e a otimização de topologia. São apresentados, ainda, exemplos de aplicação do conceito de otimização de topologia a diferentes estruturas.

No capítulo 3 é explicado inicialmente o que é o fenómeno de encurvadura e posteriormente, as suas variáveis com os respetivos exemplos.

A metodologia utilizada está exposta no capítulo 4. Este capítulo está dividido em três subcapítulos, no primeiro encontram-se os programas utilizados para a realização de um problema de otimização e no segundo é demonstrado como se realiza um projeto de uma estrutura segundo a norma do Eurocódigo 3. Por último, o terceiro subcapítulo demonstra as alterações realizadas ao programa PROAES para implementação da análise não linear e um exemplo para confirmar o seu correto funcionamento.

De seguida no capítulo 5, são apresentados três exemplos onde é possível verificar as diferenças entre estruturas otimizadas utilizando uma análise linear e uma não linear.

Por último no capítulo 6, apresentam-se as conclusões da dissertação em conjunto com sugestões para trabalhos futuros.

2. Otimização

A procura de estruturas resistentes, rígidas e leves que cumpram corretamente a sua funcionalidade, ou seja, uma estrutura ideal, foi sempre um dos objetivos fundamentais da engenharia.

Para se obter este tipo estruturas, desde o início da humanidade, que o homem experimentou uma grande variedade de técnicas construtivas. No começo, muitas delas foram baseados em "Tentativa e erro", posteriormente com o surgimento da matemática e das leis da mecânica, essas técnicas foram baseadas numa metodologia de cálculo estrutural.

Um dos primeiros trabalhos destacados no campo da otimização estrutural foi realizado por Galileo Galilei (1564-1642) [14] [15], onde tentou encontrar a forma ideal de uma viga encastrada, com uma carga pontual na sua extremidade livre.

No início do século XX, Michell [14] [15], utilizando o teorema desenvolvido por James Maxwell [14] [15], impôs os critérios para um projeto ideal de barras de peso mínimo, desenvolvendo um novo teorema. No entanto, os modelos estruturais propostos por Michell eram de difícil aplicação prática, devido ao facto de terem um elevado número de barras, além de serem estritamente isostáticos.

Segundo [16] “a otimização estrutural moderna teve início após a década de 50, onde ocorreram desenvolvimentos significativos em três domínios importantes:

- Os computadores digitais, que surgiram no início da década de 1950.
- Os métodos numéricos de programação matemática
- Os métodos numéricos de análise de estruturas, como o método dos elementos finitos.”

Com o aparecimento dos computadores, com o desenvolvimento do Cálculo Matricial de Estruturas Reticuladas e com o aparecimento do método dos elementos finitos (*MEF*) que permitiu pela primeira vez a realização de análises complexas, no século XX, a otimização estrutural deu um grande salto na sua evolução pois os problemas de otimização começaram a ser resolvidos recorrendo a métodos numéricos de Programação Linear (*SIMPLEX*) para estruturas reticuladas.

Barta em 1957 [14] [15] publicou a sua pesquisa em que determina os conjuntos de barras redundantes, para comprovar a veracidade do teorema de Sved [14] [15] segundo o qual, após a eliminação das barras redundantes de uma estrutura, afirma ser possível obter uma determinada estrutura com um peso mínimo, sendo que este método de otimização tem como base um determinado carregamento.

Schmit foi um grande marco na história da otimização estrutural, isto porque, em 1960, propôs a ideia de se aliar os métodos numéricos aos métodos de programação matemática, para automatizar a capacidade de obtenção do design ótimo de uma grande variedade de estruturas.

A analogia de Michell foi extensivamente estudada por Prager e Rozvany [15], que desenvolveram a teoria da distribuição ótima das estruturas reticuladas, os resultados desses trabalhos lançaram as bases para o desenvolvimento de trabalhos no campo da programação linear focada em problemas estruturais.

Nas décadas de 1970 e 1980 surgem evoluções nos campos dos métodos de Programação Não Linear, em que é de destacar o método de Programação Quadrática Sequencial (SQP – Sequential Quadratic Programming) e o Método das Assíptotas Móveis (MMA – Method of Moving Asymptotes) [16].

Glover em 1986, através de Meta-Heurísticas, atingiu em parte o objetivo de criar métodos aplicáveis a problemas de otimização estrutural discretos e mistos [16].

Meta-heurísticas são métodos de aproximação projetados com o objetivo de encontrar a solução para problemas complexos de otimização, baseados principalmente em mecânica estatística, evolução biológica e derivados de inteligência artificial [14]. A principal desvantagem deste tipo de técnicas é que elas não garantem a localização do máximo global ou absoluto, por isso é necessário executar um número considerável de vezes o algoritmo para aumentar a possibilidade de alcançar esta solução.

2.1 Otimização Estrutural

Como o nome indica otimizar é chegar ao ótimo, a nível estrutural é encontrar a estrutura que desempenha mais eficientemente a função pretendida.

A função pretendida a nível de um problema de otimização toma o nome de função objetivo, esta pode ser reduzir o peso ou maximizar a rigidez etc, mas para se realizar um problema de otimização é necessário definir quais as variáveis de projeto e os constrangimentos, as variáveis como o nome indica é o que sofre alterações a fim de se obter o pretendido, devem ser independentes entre si e podem ser dimensões, forma e topologia, quanto aos constrangimentos são as limitações associadas às variáveis de projeto mas também para a estrutura em si, isto é, os associados às variáveis de projeto assumindo que estamos perante um problema em que as variáveis são as áreas dos elementos são os limites inferiores e superiores em que estas podem variar, já os associados à estrutura em si podem ser deslocamentos, frequência natural e volume.

A formulação matemática *standard* de um problema de otimização realiza-se como a apresentada em 2.1:

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}} && f(\mathbf{x}) \\
\text{Sujeito a} &&& g_j(\mathbf{x}) \leq 0 && ; j = 1, \dots, m \\
&&& h_k(\mathbf{x}) = 0 && ; k = 1, \dots, p \\
&&& x_i^l \leq x_i \leq x_i^u && ; i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.1}$$

em que $f(x)$ é a função objetivo, $g_j(x)$ são os m constrangimentos de desigualdade, $h_k(x)$ são os p constrangimentos de igualdade, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é o vetor das n variáveis de projeto e por fim x_i^l e x_i^u são os limites inferiores e superiores de variação das variáveis de projeto.

Para realizar a formulação corretamente, o número de constrangimentos de igualdade tem que ser menor ou igual ao número de variáveis de projeto, ($p \leq n$).

- Se $p > n$ obtém-se um sistema de equações indeterminado.
- Se $p < n$ existe uma solução ótima para o problema.
- Se $p = n$ o valor ótimo será a solução dos constrangimentos de igualdade.

A otimização estrutural recorre a um processo iterativo controlado por um algoritmo de otimização que vai alterando as variáveis de projeto até obter o valor ótimo da função objetivo respeitando os constrangimentos.

A otimização estrutural pode ser dividida em três categorias:

- Otimização de Dimensões
- Otimização de Forma
- Otimização de Topologia

Na conceção do projeto de uma estrutura as três categorias de otimização interagem como se mostra na Figura 2.1.

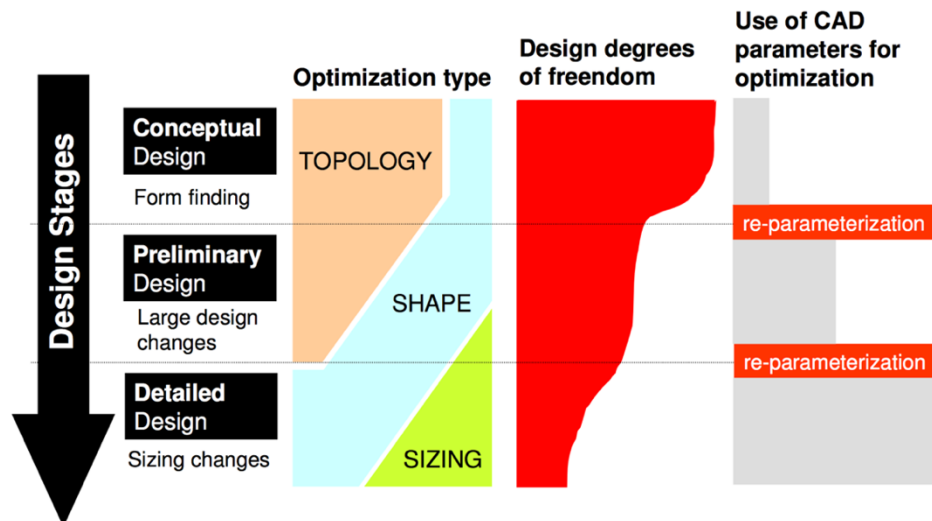


Figura 2.1-Interação das três categorias de otimização na concepção de um projeto extraído de [17]

Na fase conceptual pretende-se encontrar a forma que respeite as condições fronteira exigidas no domínio limitado, como tal utiliza-se a otimização topológica porque é vista como um processo que distribui racionalmente o material disponível num domínio através da remoção gradual de porções de material, na fase preliminar ocorrem algumas alterações a nível da estrutura para isso utiliza-se a otimização de forma, cuja função é encontrar a forma ótima de uma topologia pré definida, já na parte final, nos detalhes utiliza-se a otimização de dimensões de forma a especificar as dimensões que tornam a estrutura ótima.

2.2 Otimização de Dimensões

Surgiu na década de 1960, isto porque na altura a otimização estrutural estava orientada para a resolução de problemas de dimensões. A principal característica deste tipo de otimização é que deve-se saber à priori qual o domínio e quais as variáveis de projeto com que se pretende trabalhar. Num problema típico de otimização dimensional o objetivo é encontrar quais as dimensões ótimas dos diâmetros ou das áreas de secção das barras sem alterar a forma e a topologia da estrutura como se apresenta na Figura 2.2. As variáveis de projeto podem variar dentro de um intervalo de valores ou podem assumir valores discretos. Assumirem valores discretos significa que se trata de um problema de otimização combinatória.

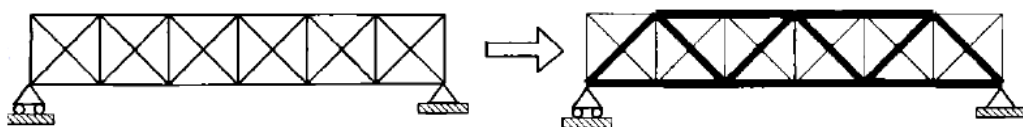


Figura 2.2-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]

2.3 Otimização de Forma

Surgiu no início da década de 1970, a sua função é encontrar a forma ótima de uma topologia pré definida (número de nós, barras e conectividade entre os nós) no interior de um domínio como apresentado na Figura 2.3, em que se faz variar a fronteira delimitadora do mesmo, a fronteira pode ser definida por um conjunto de pontos, linhas ou superfícies que por sua vez as coordenadas das mesmas vão ser as variáveis de projeto. As variáveis de projeto são contínuas.

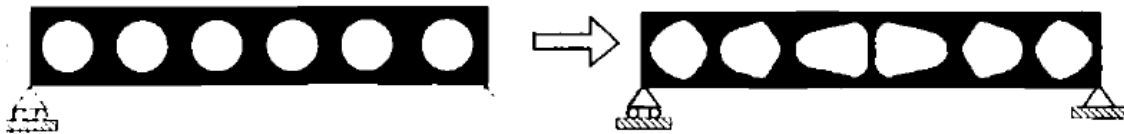


Figura 2.3-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]

2.4 Otimização de Topologia

Maxwell (1890) foi o pioneiro na utilização da otimização de topologia para estruturas, mas só em meados de 1980 é que surgiram trabalhos de investigação relevantes sobre o assunto.

A otimização topológica pode ser vista como um processo de otimização que distribui racionalmente o material disponível num domínio através da remoção gradual de porções de material. Esta pode ser realizada em meios contínuos ou discretos. Ser realizada em meio contínuo implica considerar-se que a estrutura se encontra num domínio Ω descrito por elementos finitos e através de variáveis booleanas define-se em cada ponto do domínio se existe material ou ausência de material, como apresentado na Figura 2.4.

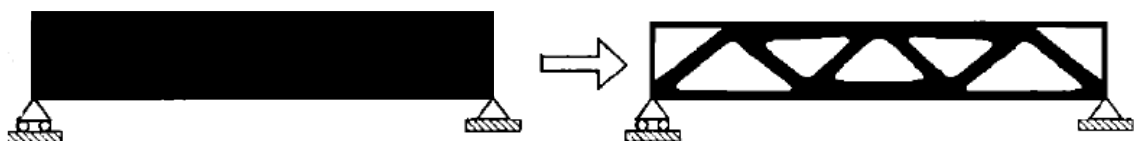


Figura 2.4-Exemplo de otimização de topologia num meio contínuo extraído de [18]

Caso seja realizada em meios discretos utiliza-se o método de *Ground Structure* que é especificamente utilizado para estruturas reticuladas (treliças). O método de *Ground Structure* foi proposto por Dorn em 1964, apesar de ser um método que encontra a solução ótima, a qualidade da solução depende da localização dos nós e da conectividade das barras da *Ground Structure* inicial. Por isso quanto mais densa for a *Ground Structure* inicial, ou seja, quantas mais barras apresentar melhor porque este método simplesmente remove as barras que não sejam necessárias. A Figura 2.5 apresenta três exemplos de *Ground Structures*.

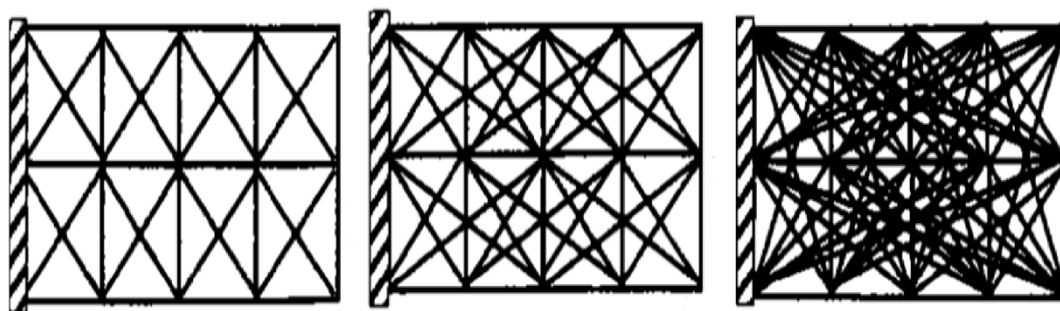


Figura 2.5-Exemplos de *Ground Structures* extraído de [18]

A otimização de uma treliça utilizando este método é formulada como um problema de dimensões, sendo a área da secção transversal das barras a variável de projeto. Ao saber-se quais os apoios, as cargas e o ponto de aplicação das mesmas, o método funciona da seguinte maneira, para cada par de nós existe uma barra a ligá-los, assume-se como limite inferior das variáveis de projeto zero, as barras que apresentem zero como área da secção transversal não apresentam utilidade para a estrutura então são removidas alterando a topologia da estrutura. Na Figura 2.6 um exemplo das várias configurações que a estrutura vai sofrendo até se obter a ótima.

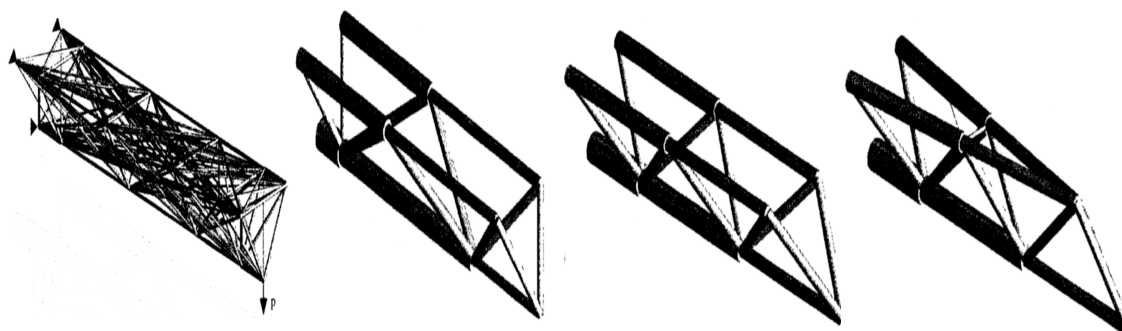


Figura 2.6.-Exemplo de configurações que uma estrutura toma durante a otimização pelo método *Ground Structure* extraído de [18]

2.4.1. Exemplos de otimização

No presente capítulo apresentam-se três exemplos de estruturas que foram otimizadas utilizando a otimização de topologia. É possível notar que consoante a função objetivo ou os constrangimentos impostos, a otimização de topologia é uma ferramenta muito forte que consegue lidar com quaisquer que sejam as características do problema que se pretende resolver.

Como primeiro exemplo escolheu-se um caso estudado por André Teixeira em [19], a *Ground Structure* estudada continha 15 nós, 38 elementos do tipo barra, um apoio fixo nos nós 1, 2 e 3, e uma carga pontual horizontal aplicada no nó 14 com um valor de $P = 100$ N. A *Ground Structure* está representada na Figura 2.7.

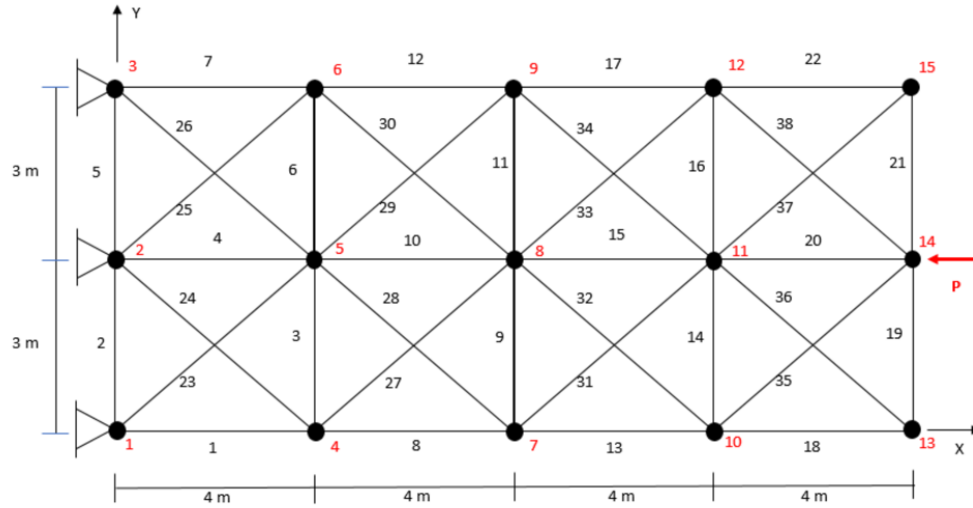


Figura 2.7-Ground Structure extraído de [19]

O objetivo pretendido era maximizar a rigidez da estrutura tendo em conta a incerteza no módulo de elasticidade do material variando a área de secção transversal dos elementos e aplicando um constrangimento no volume final da estrutura.

O problema teve a formulação 2.3:

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha_p \frac{\text{Média}}{2.82304 \times 10^{-5}} + (1 - \alpha_p) \frac{\text{Desvio Padrão}}{8.69738 \times 10^{-7}} \\ \text{s. a} \quad & V \leq V_{\text{máx}} = 4.96372 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 3,13 \times 10^{-4} \text{ m}^2 ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Um dos resultados obtidos por André Teixeira em [19] representa-se na Figura 2.8.

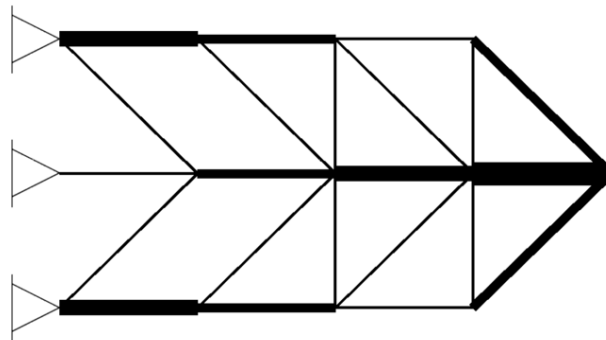


Figura 2.8-Estrutura otimizada extraído de [19]

Para segundo exemplo escolheu-se uma *Ground Structure* mais densa, isto é, com maior número de elementos. Foi estudada por Bruno Cardoso em [20], a *Ground Structure* apresenta uma incerteza relativamente ao módulo de elasticidade dos elementos e é composta por 200 elementos com área de secção transversal de 0.005 m^2 , 25 nós, um apoio fixo no nó 1, um apoio simples no nó 5 e três cargas pontuais verticais nos nós 2, 3 e 4. A *Ground Structure* está representada na Figura 2.9 bem como a posição dos nós e a numeração dos mesmos.

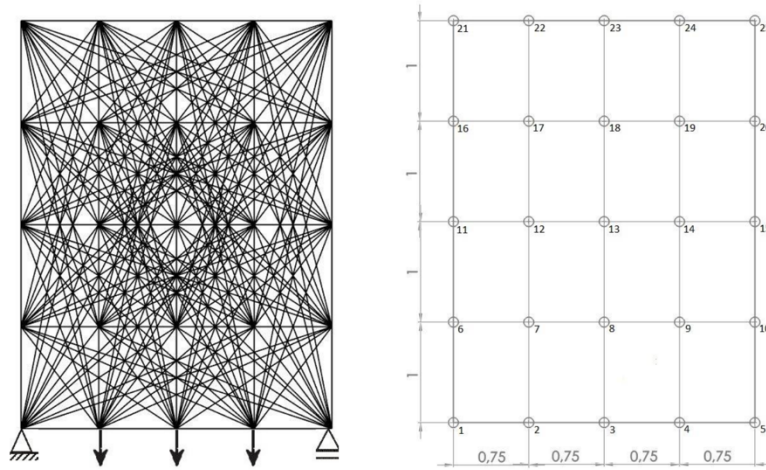


Figura 2.9-Ground Structure extraído de [20]

O pretendido do problema era minimizar a flexibilidade da estrutura, variando as áreas de secção transversal dos 200 elementos sendo que os seus valores só seriam válidos num intervalo de variação contínuo definido pelo constrangimento. O constrangimento implementado foi apenas o volume admissível.

O constrangimento de volume seguiu a seguinte fórmula:

$$V \leq V_{\text{máx}} = \frac{5L^2}{12} \quad (2.4)$$

sendo L o comprimento horizontal da estrutura: 3 m

$$V \leq V_{\text{máx}} = 3.75 \text{ m}^3 \quad (2.5)$$

o valor máximo para a variável área foi escolhido sabendo que o comprimento do somatório das barras era aproximadamente 11.60 m e o volume admissível 3.75 m^3 ficou:

$$A_{\text{máx}} = \frac{3.75}{11.60} \cong 0.323 \text{ m}^2 \quad (2.6)$$

Bruno Cardoso decidiu que deveria aumentar ligeiramente o valor da área para 0.45 m^2 e que o valor mínimo admissível seria $1 \times 10^{-8} \text{ m}^2$.

Assim o problema teve a formulação 2.7:

$$\begin{aligned} \min_{A_i} \quad & C = \alpha_p \frac{\text{Média}}{4.1667 \times 10^{-2}} + (1 - \alpha_p) \frac{\text{Desvio Padrão}}{6.9589 \times 10^{-4}} \\ \text{s. a} \quad & V \leq V_{\text{máx}} = 3.75 \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 0.45 \text{ m}^2 ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Um dos resultados obtidos por Bruno Cardoso em [20] representa-se na Figura 2.10.

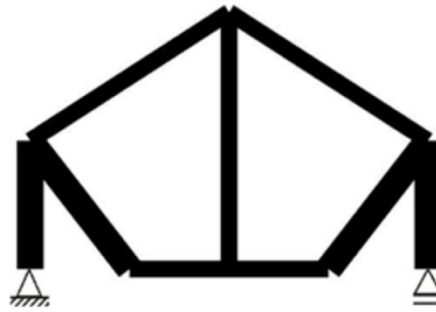


Figura 2.10-Estrutura otimizada extraído de [20]

Por fim o terceiro exemplo é de uma *Ground Structure* estudada por Raquel Leal em [21] constituída por 110 elementos sendo que os horizontais têm um comprimento de 2 m, os verticais 1 m e os oblíquos $\sqrt{5}$ m, 39 nós, um apoio fixo no nó 2, um apoio simples no nó 38 e uma carga pontual vertical no nó 20 com o valor de 10 000 N. A *Ground Structure* está representada na Figura 2.11.

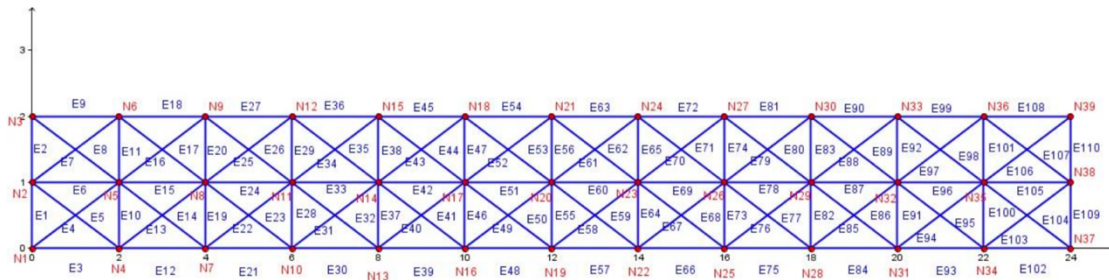


Figura 2.11 *Ground Structure* extraído de [21]

O objetivo era minimizar o deslocamento vertical do nó onde a carga era aplicada, com um constrangimento de que a estrutura final não poderia ter mais do que 10% do volume da estrutura inicial e como variáveis de projeto a área de secção transversal dos 110 elementos que podiam variar no intervalo $[1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$ e a posição das coordenadas dos nós exceto os que suportavam forças e os apoios, a variação da sua posição era de 0.5m tanto na vertical como na horizontal relativo à sua posição original.

Assim de acordo com [21] o problema de otimização tomou a formulação 2.8:

$$\begin{aligned}
 \min_{A_i, d_k} \quad & \delta_{y20} \\
 \text{s. a} \quad & V \leq 0.1 \cdot V_{inicial} \\
 & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \leq A_i \leq 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 ; i = 1, \dots, n \\
 & -0.5 \leq d_{kv} \leq 0.5 ; k = 1:n \\
 & -0.5 \leq d_{kh} \leq 0.5 ; k = 1:n
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

A estrutura otimizada obtida por Raquel Leal em [21] representa-se na Figura 2.12.

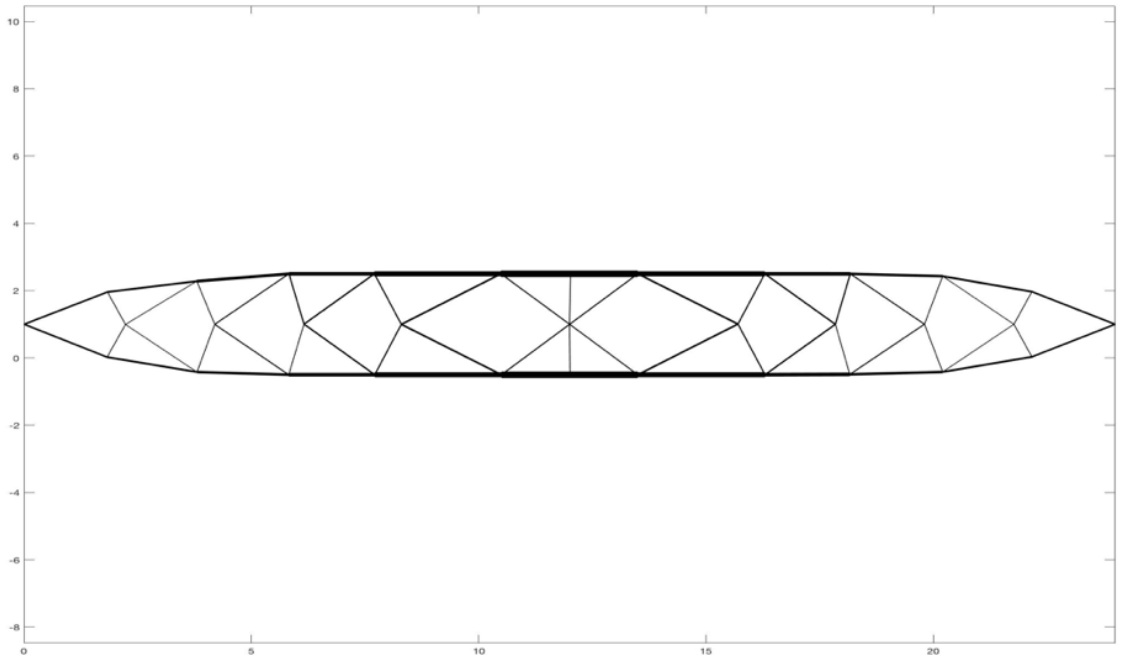


Figura 2.12-Estrutura otimizada extraído de [21]

3. Encurvadura

3.1 Fenómeno de Encurvadura

O fenómeno de encurvadura é um fenómeno que ocorre quando os elementos das estruturas são submetidos a forças de compressão elevadas, levando-os a sofrer uma deformação como apresentado na Figura 3.1. Além das elevadas forças de compressão, a encurvadura também pode ocorrer por indevida colocação das cargas ou por imperfeições nos materiais, podendo criar no elemento uma fratura na secção transversal ou até mesmo uma falha prematura.

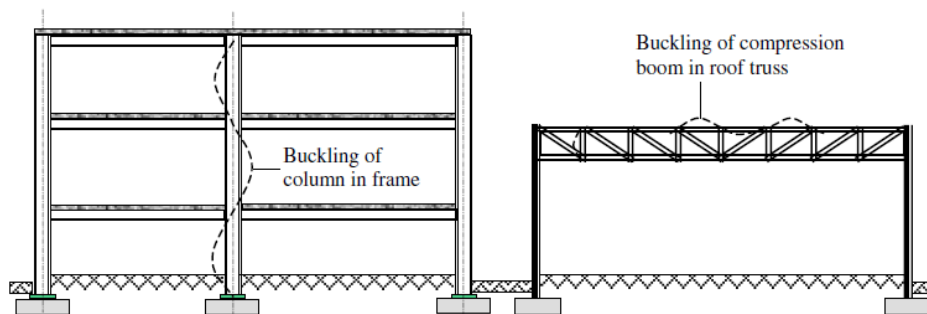


Figura 3.1-Encurvadura dos elementos de uma estrutura extraído de [4]

O fenómeno de encurvadura pode ser classificado em três tipos:

- Encurvadura geral
- Encurvadura local
- Encurvadura lateral torsional

3.2 Encurvadura geral

O projeto de colunas submetidas à compressão numa estrutura é realizado pela capacidade que as mesmas têm de resistir à carga de compressão máxima antes de ocorrer deformação. Este tipo de elemento pode ser subdividido em três categorias: colunas curtas, colunas esbeltas e colunas intermédias.

Uma coluna é considerada curta quando o seu comprimento é reduzido comparado com o raio de giração da secção transversal. Ao ser sujeita a forças de compressão axiais vai deformar-se quando o valor da tensão na secção transversal for igual à tensão cedência do material, apresentando uma deformação igual à da Figura 3.2.

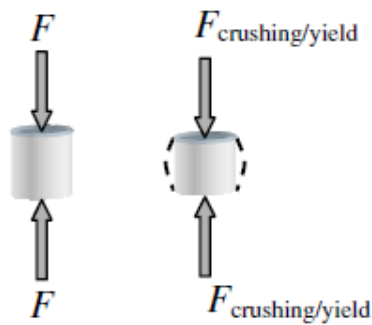


Figura 3.2-Coluna curta e a respetiva deformação extraída de [4]

Quando se trata de colunas esbeltas a deformação das mesmas é uma flexão lateral (encurvadura), como se apresenta na Figura 3.3. A deformação ocorre para um valor de tensão na secção transversal muito inferior ao da tensão de cedência do material.

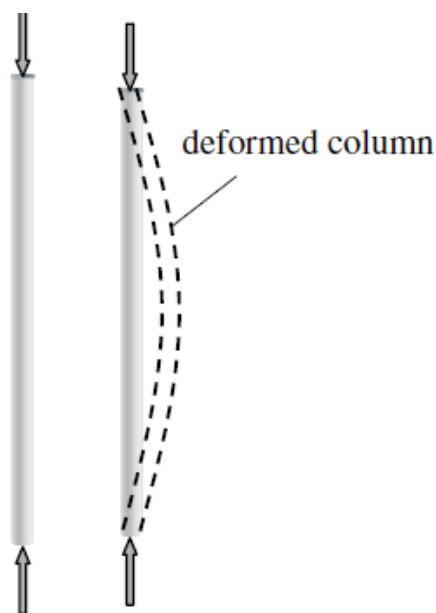


Figura 3.3-Coluna esbelta e a respetiva deformação extraída de [4]

As colunas intermédias apresentam um quociente entre comprimento e raio de giração que é intermédio entre colunas curtas e esbeltas. Estas colunas sofrem colapso pela combinação de dois fenómenos distintos: cedência plástica e instabilidade. Por esse facto é muito difícil avaliar o valor da carga de colapso que deveria ser calculada pela interação dos dois fenómenos recorrendo-se à interpolação de resultados experimentais para efetuar o correto dimensionamento.

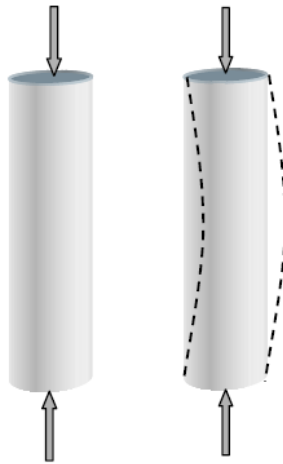
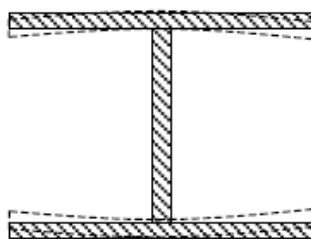


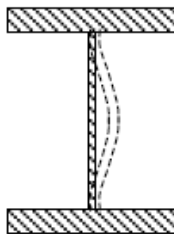
Figura 3.4-Coluna intermediária e a respetiva deformação extraída de [4]

3.3 Encurvadura local

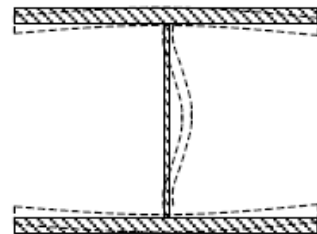
Pode ocorrer numa secção transversal quando um ou mais elementos transversais encurvam, para melhor perceção tomemos como exemplo uma secção transversal de uma viga em **I** como apresentado na Figura 3.5.



Deformação nos banzos



Deformação na alma



Deformação nos banzos e na alma

Figura 3.5-Exemplo de encurvadura de uma viga em I extraído de [4]

A deformação nos banzos ocorre devido a compressão excessiva, na alma devido a elevadas tensões de corte ou combinação de tensões de corte com flexão, a alma pode também deformar-se devido à aplicação de uma carga concentrada de compressão.

3.4 Encurvadura lateral torsional

Ao ser aplicado um carregamento ao longo de banzo superior de uma viga em I esta vai deformar-se, este tipo de deformação ocorre devido ao carregamento aplicado na viga que irá

fletir, ficando a metade superior sujeita à compressão e a metade inferior à tração como representado na Figura 3.6.



Figura 3.6-Representação da zona de tração e de compressão extraído de [4]

Estando sujeito à compressão o banzo tende a deformar-se lateralmente e a torcer em torno do eixo longitudinal à qual se dá o nome de encurvadura lateral torsional, por norma ocorre para valores de momento inferiores ao que a secção suporta. Na Figura 3.7 apresenta-se um exemplo deste tipo de encurvadura, esta é influenciada por vários fatores como restrições do movimento lateral, restrição de torção, espessura do banzo e comprimento de encurvadura.

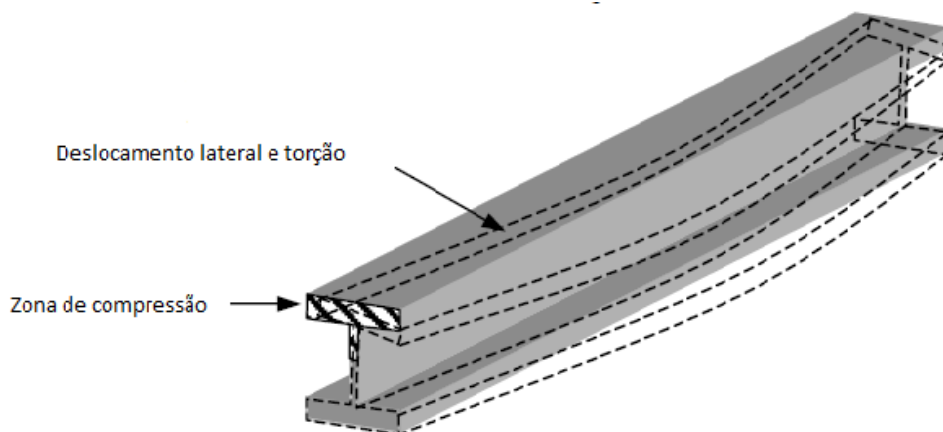


Figura 3.7-Exemplo de encurvadura lateral torsional de uma viga em I extraído de [4]

Como dito anteriormente a deformação a que uma viga é sujeita depende de vários fatores dos quais se destacam as restrições do movimento lateral e as restrições de torção.

As restrições laterais podem ser totais ou intermitentes, como o nome indica totais é ao longo de toda a viga, enquanto que intermitentes é com uma distância entre os pontos que realizam a restrição como se apresenta na Figura 3.8.

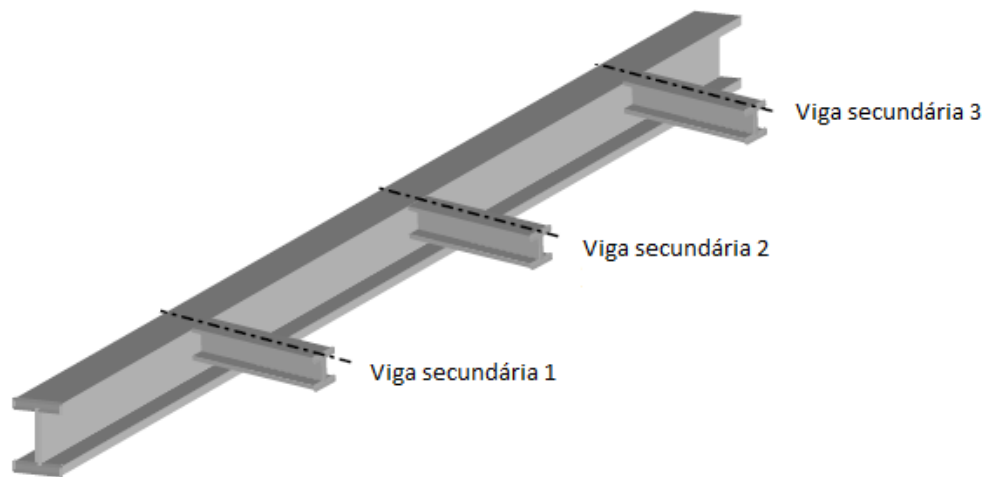


Figura 3.8-Restrição lateral intermitente de uma viga em I extraído de [4]

Para realizar as restrições de torção é necessário garantir que os banzos não alteram a sua posição relativamente ao eixo longitudinal durante a flexão, como tal adicionam-se componentes de forma a garantir o pretendido como apresentado na Figura 3.9.

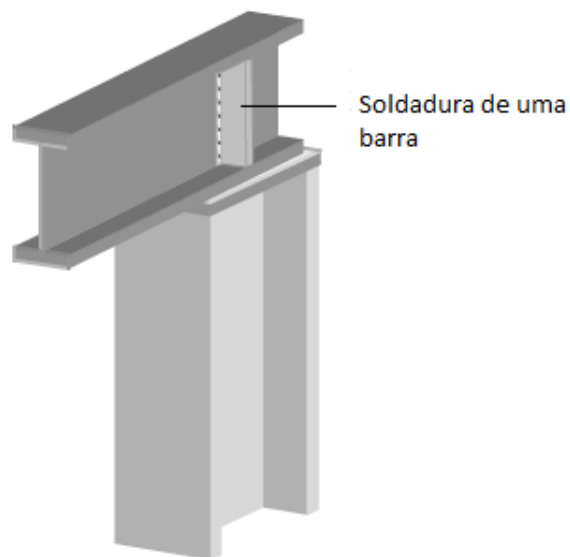


Figura 3.9-Restrição de torção de uma viga em I extraído de [4]

4. Metodologia

Tendo a presente dissertação como objetivo a criação de um método simplificado de penalizar a excessiva esbeltez das barras, utilizou-se para obtenção de resultados o programa PROAES em conjunto com a *toolbox* de otimização do MATLAB (*optimtool*) para realizar as otimizações de topologia. Foi também utilizado o Eurocódigo 3 parte 1.1, para considerar a encurvadura das barras das estruturas e dimensioná-las corretamente.

4.1. PROAES e *Optimtool*

O PROAES é um programa desenvolvido no DEMI, que está escrito em linguagem MATLAB composto por um conjunto de módulos, módulos esses que permitem a realização das seguintes tarefas:

1. Análise linear de modelos estruturais pelo método dos elementos finitos.
2. Cálculo de derivadas de funções associadas ao desempenho estrutural em ordem às variáveis de projeto.
3. Otimizar modelos de estruturas considerando constrangimentos definidos.

Para se realizar uma análise de elementos finitos é necessário criar um ficheiro de dados com uma extensão **.inp** que contenha nós, elementos, materiais, apoios, cargas aplicadas etc, da estrutura a ser analisada. Após a análise se realizar, o PROAES escreve os resultados num ficheiro com extensão **.out**, na Figura 4.1 está apresentado o diagrama do funcionamento do que foi explicado anteriormente.

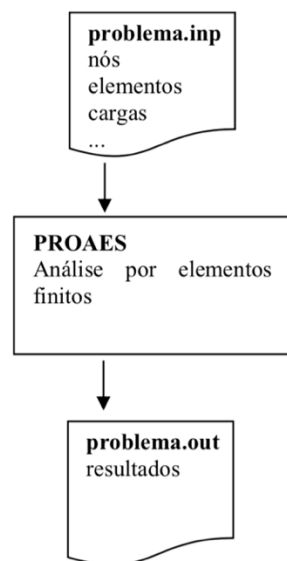


Figura 4.1-Diagrama de execução do PROAES adaptado de [22]

Para realizar um problema de otimização é necessário utilizar a *toolbox* de otimização do MATLAB (*optimtool*) juntamente com o PROAES. Na Figura 4.2 representa-se a troca de informações entre ambos.

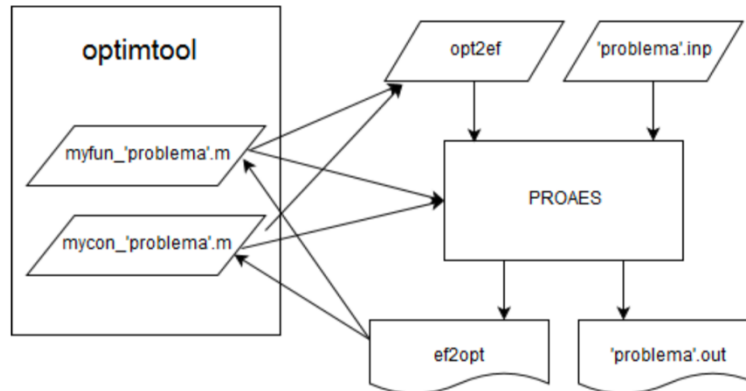


Figura 4.2-Esquema de funcionamento do PROAES adaptado de [22]

É através da *optimtool* que se define qual o ponto de partida da otimização e quais os limites superiores e inferiores de variação, além disso a *optimtool* permite ainda definir o número máximo de iterações, quais as tolerâncias pretendidas para os resultados da função objetivo como para os dos constrangimentos, o método do cálculo das derivadas entre outras opções. A *optimtool* dispõe de alguns algoritmos de otimização (SQP, Interior Point, etc) para os diferentes tipos de problemas de otimização (minimização não linear com e sem constrangimentos, minimização semi-infinita, etc).

Para o MATLAB e o PROAES comunicarem entre eles é necessária a criação de mais dois ficheiros, o “*myfun*” e o “*mycon*”, que só podem ser criados depois de criado o ficheiro *.inp*. Tanto o ficheiro “*myfun*” como o “*mycon*” apresentam uma extensão *.m*, são criados para definir o problema de otimização e para chamar o PROAES, para que este calcule a função objetivo, os constrangimentos e as respetivas derivadas. Isto porque o algoritmo utilizado na dissertação foi o SQP, que é um algoritmo baseado no gradiente e como tal, necessita da informação das derivadas tanto da função objetivo como dos constrangimentos.

O ficheiro “*op2ef*” é um ficheiro que contém o tipo de análise, isto é, o utilizador pode definir o que pretende calcular, ou seja, pode optar por apenas calcular as performances, por calcular apenas as sensibilidades ou calcular ambas em simultâneo. Este ficheiro contém também, o número de variáveis, os seus valores e o número de performances com os respetivos identificadores. Para além disto, o “*op2ef*” é escrito automaticamente pelos ficheiros “*myfun*” e “*mycon*”.

O ficheiro “*ef2opt*” é escrito pelo PROAES com os resultados do cálculo da função objetivo e constrangimentos. Permite verificar se a solução obtida é ótima, caso isso não se

verifique, o ficheiro “opt2ef” é alterado e é realizada uma nova análise. Este processo é repetido até não ser possível melhorar a estrutura sem violar os constrangimentos.

4.2. Projeto de uma estrutura considerando o fenómeno da encurvadura e utilizando o Eurocódigo

Para que fosse possível a realização deste subcapítulo foi usada, maioritariamente, a informação contida em [23].

Na realização de um projeto de uma coluna esbelta que falha devido à flexão lateral (encurvadura), a sua área da secção transversal dever ser dimensionada tendo em conta dois aspetos importantes:

- O valor da tensão na área de secção transversal não pode ser superior à tensão admissível do material como apresentado na equação 4.1.

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{Adm} \quad (4.1)$$

- A deformação deve-se manter dentro de valores recomendados como apresentado na equação 4.2.

$$\delta = \frac{PL}{AE} \leq \delta_{esp} \quad (4.2)$$

Para se garantir que a deformação fica dentro dos valores é necessário descobrir o valor da carga máxima que se pode aplicar, a chamada carga crítica.

O matemático Leonard Euler em 1757 desenvolveu uma teoria para análise de estruturas que falhavam devido à encurvadura, a teoria desenvolvida baseava-se numa equação diferencial que representava a deformação elástica de uma coluna fixa, através do momento de flexão e da curvatura da coluna ao longo de todo o seu comprimento sujeito a um carregamento axial.

Momento de flexão:

$$M = EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \quad (4.3)$$

Considerando que a coluna que se pretende projetar encontra-se representada na Figura 4.3 (a), estando sujeita dois carregamentos de igual intensidade P nas suas extremidades e apresenta um comprimento L, já na Figura 4.3 (b) representa-se a deformação da mesma sujeita

ao respetivo carregamento, por fim na Figura 4.3 (c) apresenta-se o diagrama de corpo livre de uma parte da coluna.

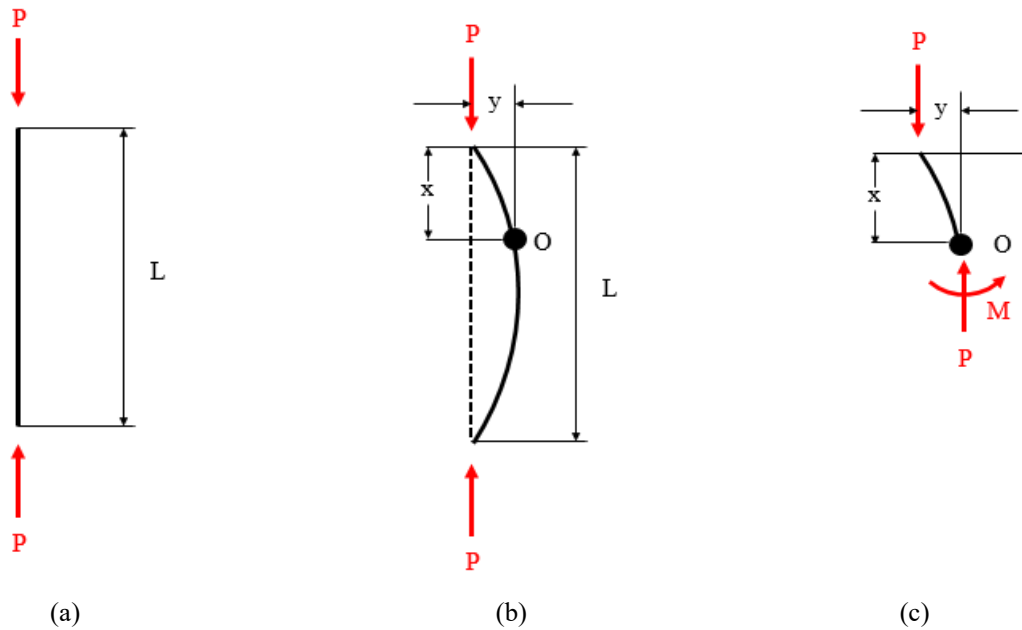


Figura 4.3-Exemplo de uma coluna sujeita a um carregamento axial de compressão e a sua deformação

Observando a Figura 4.3 e considerando o equilíbrio do corpo representado em 4.3 (c) pode escrever-se a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (4.4)$$

A equação 4.4 é uma equação diferencial homogénea de 2ª ordem com coeficientes constantes, considerando

$$p^2 = \frac{P}{EI} \quad (4.5)$$

então a equação 4.4 fica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p^2 y = 0 \quad (4.6)$$

que coincide com a da equação diferencial do movimento harmónico simples.

A solução geral é dada por:

$$y = C_1 \cdot \sin(px) + C_2 \cdot \cos(px) \quad (4.7)$$

Condições fronteira:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x = L \rightarrow y = 0 \rightarrow C_1 \cdot \sin(pL) = 0$$

$$C_1 \cdot \sin(pL) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \cup \sin(pL) = 0 \quad (4.8)$$

Se $C_1 = 0 \rightarrow$ a coluna permanece reta, isto é, indeformada.

Se $\sin(pL) = 0 \rightarrow$ é necessário que $pL = n\pi$ ou que $P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$

em que n corresponde ao valor da harmónica, isto é, a forma da encurvadura como se mostra da Figura 4.4.

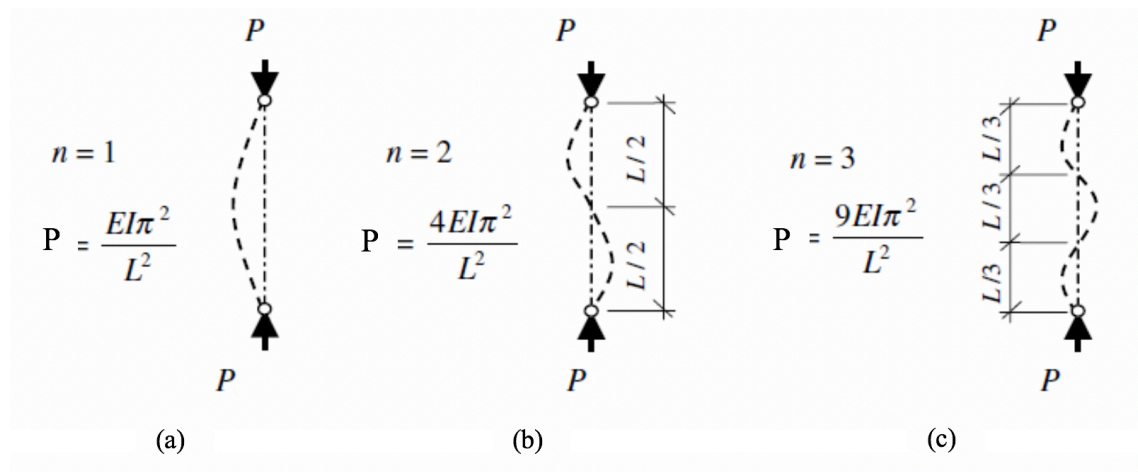


Figura 4.4-Variação do valor da harmónica adaptado de [4]

Para se obter o menor valor de P utiliza-se $n=1$, segundo Euler [4] o valor da carga crítica é dado pela equação 4.9:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (4.9)$$

assim sendo o valor da tensão crítica é dado pela equação 4.10:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A \cdot L^2} \quad (4.10)$$

O raio de giração é dado pela equação 4.11:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4.11)$$

e a esbelteza é dada pela equação 4.12:

$$\lambda = \frac{L}{i} \quad (4.12)$$

introduzindo o raio de giração e a esbelteza na equação da tensão crítica, esta também pode ser escrita de acordo com a equação 4.13:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (A \cdot i^2)}{A \cdot L^2} = \frac{\pi^2 E \cdot i^2}{L^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4.13)$$

No caso de colunas que apresentem diferentes condições de fronteira das apresentadas anteriormente para utilizar a equação de Euler da carga crítica é necessário ter em conta o comprimento da encurvadura (L_e) que varia em função dos tipos de apoios e não do comprimento da coluna (L) como se mostra na Figura 4.5, a equação da carga crítica pode ser escrita como a 4.14 e da tensão crítica de acordo com a equação 4.15.:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot i^2}{L_e^2} \quad (4.15)$$

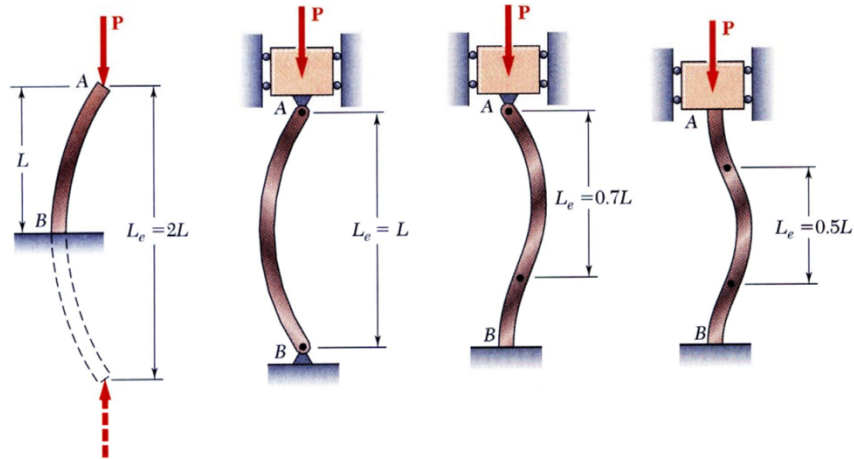


Figura 4.5-Variação do comprimento de encurvadura em função dos diferentes tipos de apoios extraído de [23]

Na presente dissertação utilizou-se o:

Eurocódigo 3: Projeto de Estruturas de Aço.

Parte 1.1: Regras Gerais e Regras para Edifícios.

Segundo o Eurocódigo 3 no projeto de uma coluna de forma a tornar independente a escolha do aço, inicialmente determina-se a esbelteza normalizada, $\bar{\lambda}$, dada pela equação 4.16:

$$\bar{\lambda} = \frac{L_e/i}{\pi\sqrt{E/\sigma_c}} \quad (4.16)$$

em seguida determina-se o esforço axial resistente da coluna, N_{rd} , dado pela equação 4.17:

$$N_{rd} = \frac{\chi A \sigma_c}{\gamma_{M1}} \quad (4.17)$$

γ_{M1} é um coeficiente parcial de segurança, que toma um valor igual a 1,1 e χ um fator de redução, este é calculado pela equação 4.18 que por sua vez depende de $\bar{\lambda}$. $\bar{\lambda}$ toma diferentes valores consoante os tipos de colunas, os valores que pode tomar são os seguintes:

colunas curtas ou colunas à tração, $\bar{\lambda} \leq 0.2 \Rightarrow \chi = 1$

colunas esbeltas e intermédias, $\bar{\lambda} > 0.2$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (4.18)$$

em que ϕ é calculado de acordo com a equação 4.19

$$\phi = 0.5(\bar{\lambda}^2 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + 1) \quad (4.19)$$

α é um parâmetro de imperfeição que varia dependendo da geometria da secção, do processo de fabrico e do eixo em torno do qual ocorre a encurvadura, este parâmetro existe, pois, como dito anteriormente a encurvadura pode ocorrer não só devido a carregamentos elevados, mas também por má colocação das cargas ou por imperfeições nos materiais. Os valores de α podem ser:

$$\alpha = 0.21; \alpha = 0.34; \alpha = 0.49; \alpha = 0.76;$$

A Figura 4.6 apresenta as curvas de dimensionamento utilizadas no Eurocódigo 3 para cada α juntamente com a curva de Euler, é de notar que a curva de Euler aproxima-se das curvas de dimensionamento utilizadas no Eurocódigo 3, o que demonstra que utilizando o Eurocódigo 3 realiza-se uma boa aproximação aos valores de carga crítica.

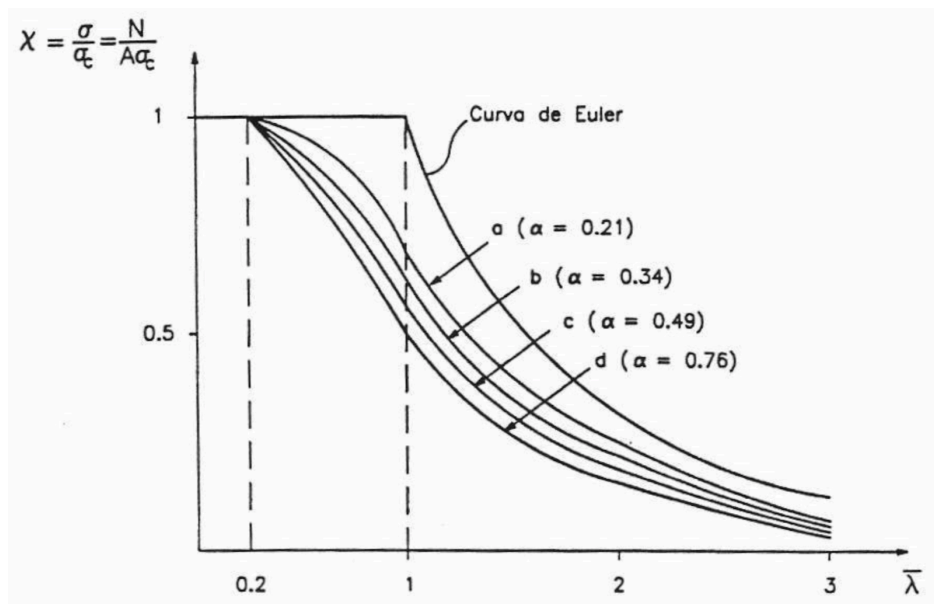


Figura 4.6-Curvas de dimensionamento do Eurocódigo 3 extraído de [23]

4.3. Implementação da Análise Não Linear

Como referido no capítulo 4.1 o PROAES é capaz de realizar uma análise linear, assim, de forma a criar um programa mais completo manteve-se essa opção e adicionou-se então a opção de realizar uma análise não linear (assumindo não linearidade geométrica) ao qual se deu o nome de PROAES_Barra2D.

O fenómeno da encurvadura segue um comportamento não linear, isto é, deformação que a barra sofre não é diretamente proporcional ao aumento da força aplicada (comportamento geometricamente não linear) como apresentado na Figura 4.7, ou as tensões deixam de ser proporcionais às deformações, ou a rigidez do material varia em função da carga.

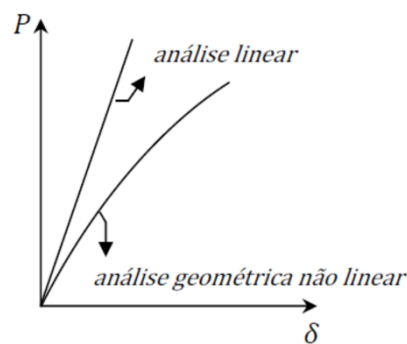


Figura 4.7-Comportamento linear e não linear extraído de [24]

Observando a Figura 4.7 é possível notar que para um aumento no carregamento o deslocamento para uma análise não linear irá sempre ser maior do que numa análise linear, assim, para resolver problemas de análise não linear a matriz de rigidez irá sempre variar em função do deslocamento.

De maneira a se ter em conta o comportamento não linear dos elementos utilizou-se o fator χ , isto porque se considerou uma redução de rigidez análoga à redução da resistência prevista no Eurocódigo 3. Como tal a matriz de rigidez dos elementos passou a ser dada pela equação 4.20:

$$[K] = \chi \times [K] \quad (4.20)$$

Para o cálculo de χ ser realizado em função da área das barras foram tomadas certas ponderações, sendo essas as seguintes apresentadas:

- Os elementos de barra apresentavam uma geometria de secção circular como tal $\alpha = 0.21$;

- Como foi referido no capítulo 4, o coeficiente parcial de segurança toma o valor de $\gamma_{M1} = 1.1$;
- Admitiu-se que a tensão de cedência do material das barras era de 250 MPa;
- As barras eram articuladas, então $L_e = L$;
- O raio exterior era cinco vezes maior que a espessura do tubo, como demonstrado pela equação 4.20:

$$r_e = 5 \times t \Leftrightarrow t = \frac{r_e}{5} \quad (4.20)$$

colocando tudo em função do raio exterior, o raio interior é dado pela equação 4.21:

$$r_i = r_e - \frac{r_e}{5} = \frac{4}{5} r_e \quad (4.21)$$

a área da secção tubular dada por 4.22:

$$A = \pi \times \left[r_e^2 - \left(\frac{4}{5} r_e \right)^2 \right] = 0.36 \cdot \pi \cdot r_e^2 \Leftrightarrow r_e = \sqrt{\frac{A}{0.36 \cdot \pi}} \quad (4.22)$$

o momento de inércia dado por 4.23:

$$I = \frac{\pi}{4} \left[r_e^4 - \left(\frac{4}{5} r_e \right)^4 \right] = 0.14760 \cdot \pi \cdot r_e^4 \quad (4.23)$$

e o raio de giração por 4.24:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0.14760 \cdot \pi \cdot r_e^4}{0.36 \cdot \pi \cdot r_e^2}} = 0.64031 \cdot r_e \quad (4.24)$$

Assim, todas as variáveis necessárias para o cálculo de χ estão em função da área da secção tubular.

4.3.1. Análise de Elementos Finitos

De maneira a manter a análise linear a funcionar juntamente com a não linear adicionou-se ao programa uma segunda análise de elementos finitos, sendo esta ativada apenas quando se pretende realizar uma análise não linear. A primeira análise apenas indica quais as barras que se encontravam à tração (esforço normal maior ou igual a zero) ou à compressão (esforço normal menor que zero). Então todas as barras que se encontravam à tração ou apresentassem um valor de $\bar{\lambda} \leq 0.2$ o valor que χ tomava era 1, se isso não se verificava o valor que χ tomava era calculado pela equação 4.18. Assim a matriz rigidez em coordenadas globais tendo em conta o fator χ foi:

$$K_g = \chi \times \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cdot \cos \beta \\ \sin \beta \cdot \cos \beta & \sin^2 \beta & -\sin \beta \cdot \cos \beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cdot \cos \beta & \cos^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta \\ -\sin \beta \cdot \cos \beta & -\sin^2 \beta & \sin \beta \cdot \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Adicionou-se também um segundo cálculo de tensões cujo valor de χ foi calculado como explicado anteriormente e a matriz de rigidez ao sofrer alterações tornou-se a seguinte:

$$K_g = \chi \times \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & -\cos \beta & -\sin \beta \\ -\cos \beta & -\sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

4.3.2. Sensibilidades

A análise de sensibilidades (*sensitivity analysis ou design sensitivity analysis*) em Mecânica Estrutural dedica-se essencialmente ao cálculo de variações do comportamento das estruturas que decorrem da alteração dos parâmetros que condicionam esse comportamento.

Como dito no capítulo 2.1. para realizar um problema de otimização é necessário conhecer a função objetivo, as variáveis de projeto e os constrangimentos, em que a função objetivo e os constrangimentos poderiam ser: peso, tensão ou deslocamentos a quais se pode dar o nome de medidas de desempenho ou performance estrutural. Se designarmos uma performance estrutural por ψ e as variáveis de projeto por X_i , a análise de sensibilidades permite obter os gradientes da função objetivo ou dos constrangimentos em ordem às variáveis de projeto, $\partial\psi/\partial X_i$. Na presente dissertação como referido no capítulo 4.1. o algoritmo utilizado para os problemas de otimização foi o SQP, que é um algoritmo baseado no gradiente e como tal, necessita da informação das derivadas tanto da função objetivo como dos constrangimentos por isso é que se realiza o cálculo das sensibilidades.

Apesar de o PROAES já realizar o cálculo das sensibilidades para uma análise linear, para a análise não linear foi necessário ter em conta que ao considerar uma redução de rigidez

análoga à redução prevista no Eurocódigo 3 e o cálculo de χ ser realizado em função da área das barras se estivéssemos perante um problema cujas variáveis de projeto fossem as áreas de secção das barras, a derivada da matriz de rigidez em ordem à área teria de ter em conta que χ dependia da área. Sendo uma derivada complexa e extensa, foi necessário recorrer ao MATLAB, este expressou a derivada em função de E , L_e , σ_c e A como se apresenta na equação 4.27.

$$C = \frac{E}{L_e \left(\alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \sqrt{\left(\alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B_4 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{B_3 \cdot A \cdot E \cdot \pi} + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} \right)} + \frac{A \cdot E \left(\frac{\left(\frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{B_3 \cdot A^2 \cdot E \cdot \pi} + \frac{B_5 \cdot L_e \cdot \alpha}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_6} \right) \cdot \alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} - \frac{B_4 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{B_3 \cdot A^2 \cdot E \cdot \pi} \right)}{2 \cdot \left(\alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B_4 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3}} + \frac{L_e \left(\alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \left(\alpha \left(\frac{B_0 \cdot L_e}{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_c}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot A}{9}} \cdot B_1} - \frac{1}{5} \right) + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{B_4 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{B_2 \cdot L_e^2 \cdot \sigma_c}{A \cdot E \cdot \pi \cdot B_3} + \frac{1}{2} \right)}{2} + \dots \right) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 10000 & B_1 &= 64031 \\ B_2 &= 1800000000 & B_3 &= 4099968961 \\ B_4 &= 3600000000 & B_5 &= 625000 \\ B_6 &= 576279 \end{aligned}$$

Para os casos em que as barras se encontram à compressão e que tenham um valor de $\bar{\lambda} > 0.2$, pois apresentam um comportamento não linear, a derivada da matriz rigidez em coordenadas globais fica:

$$K_g = C \cdot \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\cos^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta \\ -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \text{sen}^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\text{sen}^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \cos^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta \\ \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\text{sen}^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Mas para as barras estão à tração ou que apresentem um valor $\bar{\lambda} \leq 0.2$ apresentam um comportamento linear como tal, a derivada da matriz rigidez em coordenadas globais fica:

$$K_g = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\cos^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta \\ \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \text{sen}^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\text{sen}^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \cos^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta \\ -\text{sen}\beta \cdot \cos\beta & -\text{sen}^2 \beta & \text{sen}\beta \cdot \cos\beta & \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.3.3. Exemplo de verificação

Após estas alterações foi necessário verificar se o PROAES_Barra2D estaria a realizar bem os cálculos tanto para a análise linear como para a análise não linear, como tal, tomou-se como exemplo de verificação uma barra bi-apoiada sujeita a uma força de compressão como se mostra na Figura 4.8.

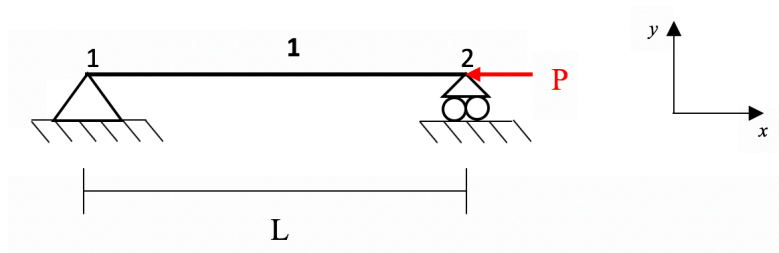


Figura 4.8-Exemplo de verificação

Os dados do problema são os seguintes:

- $P = 1000 \text{ N}$
- $L = 1 \text{ m}$
- $A = 0.0001 \text{ m}^2$
- $E = 210 \text{ GPa}$

Realizando uma análise linear o deslocamento do nó 2 segundo x calculado pelo PROAES_Barra2D foi de:

$$\delta_{x2_PROAES_Barra2D} = -4.761905 \times 10^{-5} m$$

para verificar se o valor calculado pelo PROAES_Barra2D se encontrava correto utilizou-se a equação 4.31:

$$\delta = \frac{P \cdot L}{A \cdot E} \quad (4.30)$$

substituindo as variáveis obteve-se:

$$\delta = \frac{-1000 \cdot 1}{0.0001 \cdot 210 \times 10^9} = -4.761904 \times 10^{-5} m$$

sendo os valores praticamente iguais conclui-se que o programa está a calcular corretamente os valores.

Para verificar o cálculo das sensibilidades recorreu-se ao método das diferenças finitas progressivas. Utilizou-se este método pois apresenta a vantagem de ser genérico, isto é, aplicável a todo o tipo de performances e variáveis. Permite calcular uma aproximação da derivada perturbando a variável X por adição de um valor ΔX e calculando novamente a performance ψ , como representado pela equação 4.32 e a figura 4.3.3.2.

$$\frac{d\psi}{dX} \approx \frac{\psi(X + \Delta X) - \psi(X)}{\Delta X} \quad (4.31)$$

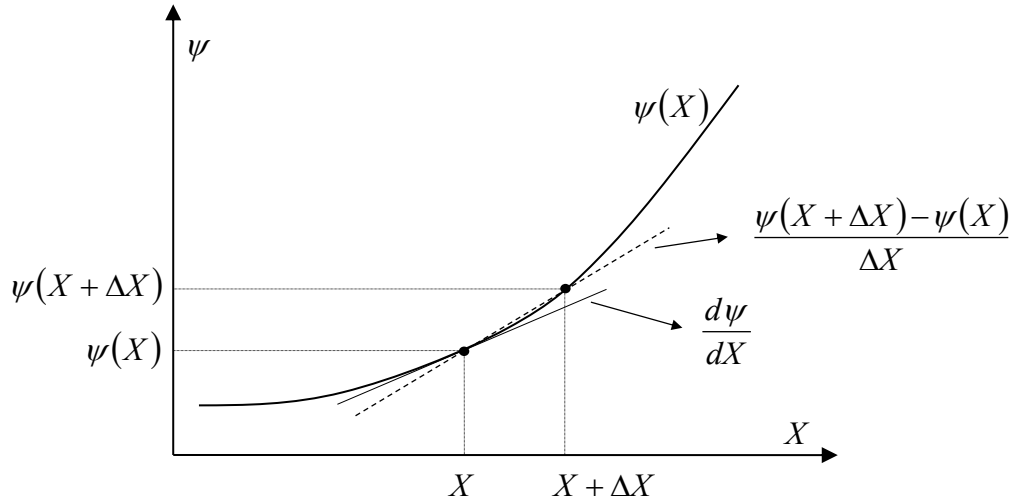


Figura 4.9-Diferenças finitas progressivas

Para a análise linear, o valor inicial do deslocamento que se obteve foi:

$$\delta_{x2_inicial} = -4.761904761905 \times 10^{-5} \text{ m}$$

realizando uma perturbação de $1 \times 10^{-7} \text{ m}$ à área de secção da barra o novo valor obtido foi:

$$\delta_{x2_perturbado} = -4.757147614290 \times 10^{-5} \text{ m}$$

e a respetiva sensibilidade calculada pelo PROAES_Barra2D foi de:

$$sensibilidade = 4.752395219071 \times 10^{-1}$$

Através da equação 4.31 do método das diferenças finitas progressivas o valor obtido foi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} \approx \frac{(-4.757147614290 \times 10^{-5}) - (-4.761904761905 \times 10^{-5})}{1 \times 10^{-7}} = 0.475714761499931$$

Calculando o erro pela equação 4.32:

$$Erro = \frac{|Valor\ exacto - Valor\ aproximado|}{Valor\ aproximado} \times 100 \quad (4.32)$$

obteve-se um erro de:

$$Erro = \frac{|0.4752395219071 - 0.475714761499931|}{0.475714761499931} \times 100 = 0.09\%$$

Como tal é possível concluir que o PROAES_Barra2D calcula corretamente as sensibilidades para uma análise linear.

Para a análise não linear, o valor inicial do deslocamento que se obteve foi:

$$\delta_{x2_inicial} = -1.805039557063 \times 10^{-4} \text{ m}$$

realizando uma perturbação de $1 \times 10^{-7} \text{ m}$ na área de secção da barra o novo valor obtido foi:

$$\delta_{x2_perturbado} = -1.801602965547 \times 10^{-4} \text{ m}$$

e a respetiva sensibilidade cálculo pelo PROAES_Barra2D foi de:

$$sensibilidade = 3.43510296281$$

Através da equação 4.31 o valor obtido foi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} \approx \frac{(-1.801602965547 \times 10^{-4}) - (-1.805039557063 \times 10^{-4})}{1 \times 10^{-7}} = 3.436591515999809$$

calculando o erro pela equação 4.32 obteve-se o seguinte valor:

$$Erro = \frac{|3.43510296281 - 3.436591515999809|}{3.436591515999809} \times 100 = 0.04\%$$

Sendo assim é possível concluir que o PROAES_Barra2D também calcula corretamente as sensibilidades para uma análise não linear.

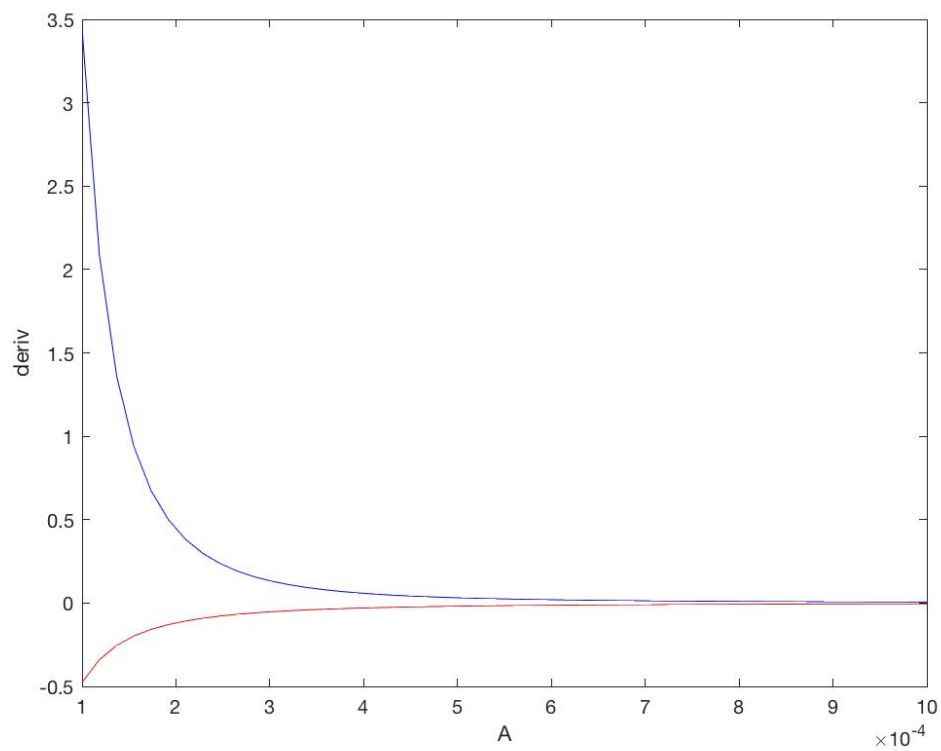


Figura 4.10-Gráfico das derivadas (deriv) de uma análise linear (vermelho) e não linear (azul) em função da área (A)

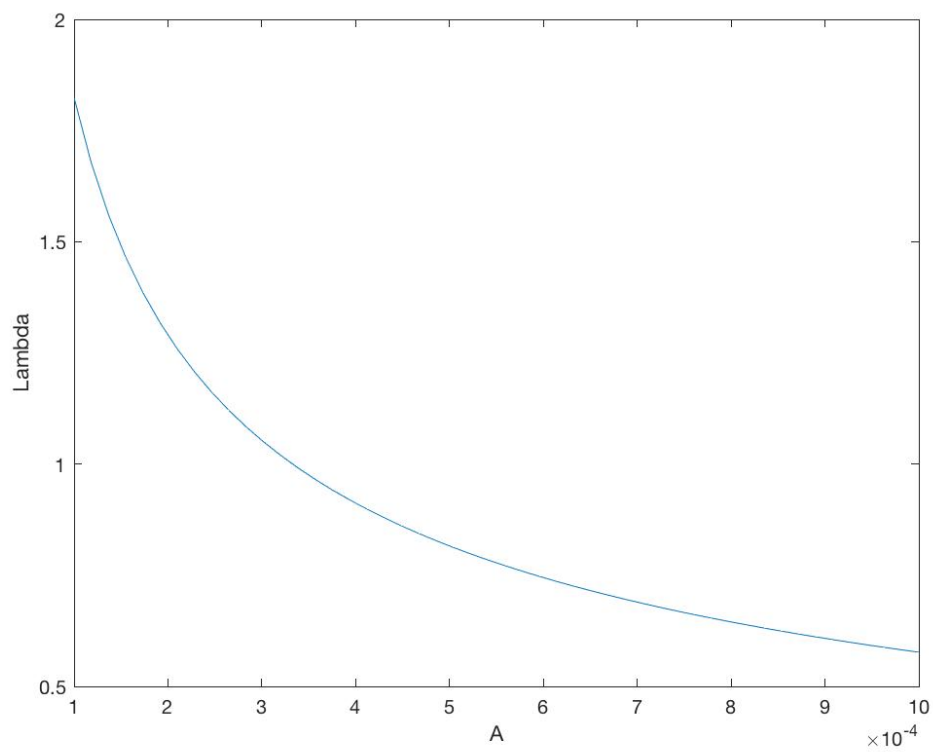


Figura 4.11-Gráfico da esbelteza normalizada (lambn) em função da área (A)

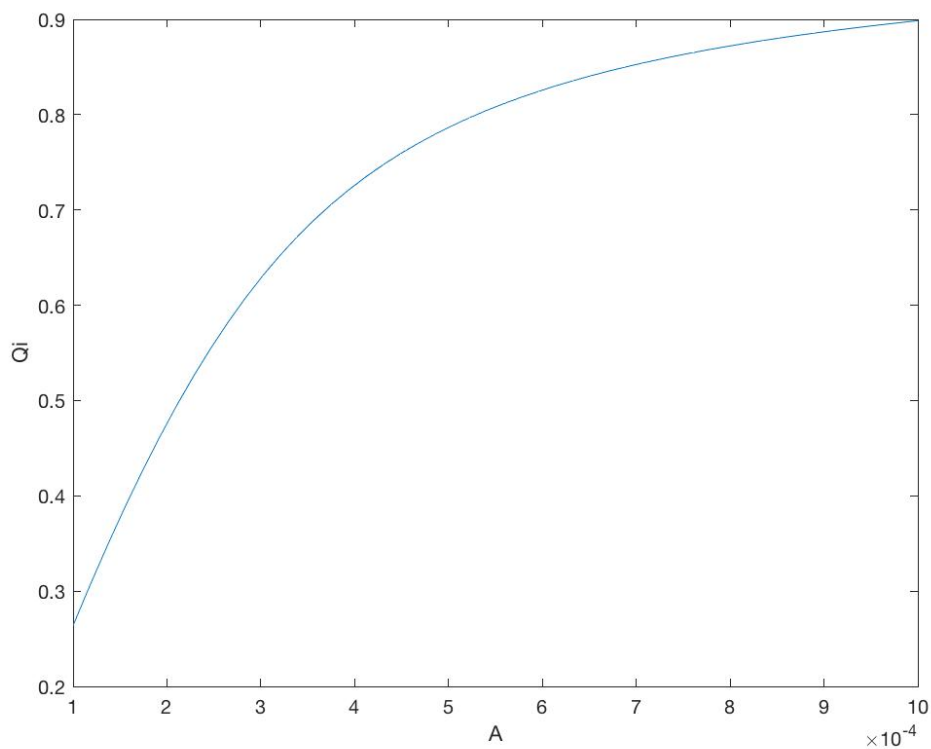


Figura 4.12-Gráfico de χ (Q_i) em função da área (A)

Observando as três figuras acima é possível verificar que:

Na Figura 4.10 apesar de, inicialmente para valores pequenos de áreas, as derivadas se encontrarem díspares para valores de área maiores, nomeadamente sete vezes maiores que o inicial estas tendem a aproximarem-se o que é possível concluir que para “grandes” valores de áreas aplicando o mesmo carregamento, realizar-se uma análise não linear ou uma análise linear não faz grande diferença pois as barras com uma “grande” área de secção suportam com maior facilidade o mesmo carregamento como era de esperar.

Na Figura 4.11 o valor da esbelteza normalizada ($\bar{\lambda}$) decresce com o aumento da área pois de acordo com a equação 4.16 no numerador o comprimento da encurvadura (L_e) aparece a dividir pelo raio de giração (i) e como apresentado na equação 4.24 este está em função do raio exterior (r_e) que por sua vez está em função da área de secção como tal quanto maior a área menor o valor de $\bar{\lambda}$.

Na Figura 4.12 o valor de χ aumenta com o aumento da área pois este é calculado pela equação 4.18 que está em função de ϕ e por sua vez ϕ depende de $\bar{\lambda}$, como $\bar{\lambda}$ diminui com o aumento da área o valor de ϕ também diminui então é normal que χ aumente.

Pelos erros associados aos cálculos das sensibilidades serem baixos e pelo correto comportamento que as derivadas, o valor de $\bar{\lambda}$ e o valor de χ demonstraram em função da área é possível concluir que o PROAES_Barra2D funciona corretamente.

O seu funcionamento apresenta-se no esquema da Figura 4.13.

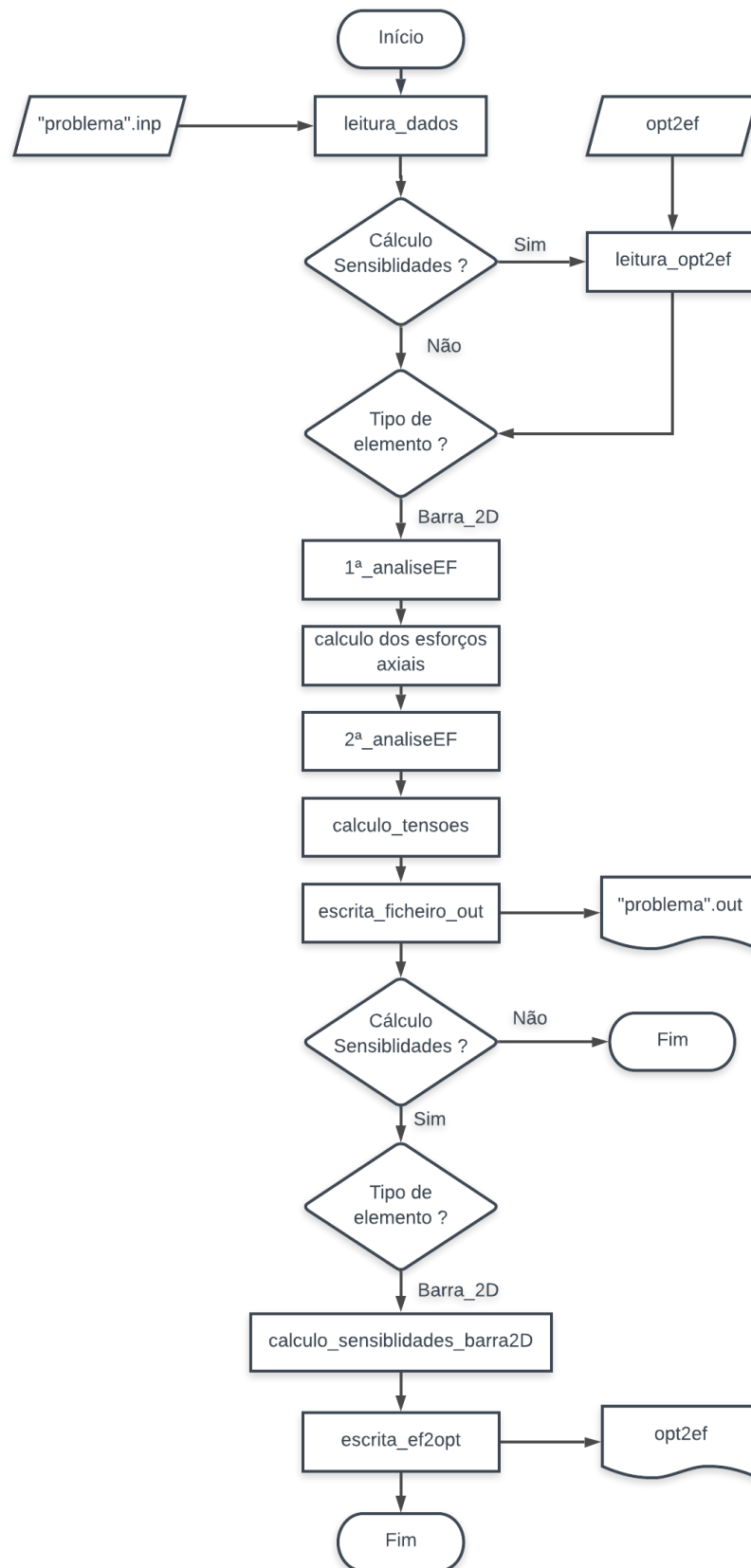


Figura 4.13-Esquema de funcionamento do PROAES_Barra2D

5. Estruturas otimizadas

No presente capítulo apresentam-se três exemplos de *Ground Structures* que foram otimizadas utilizando o PROAES_Barra2D em conjunto com a *optimtool* do MATLAB.

5.1. Exemplo 1

Escolheu-se uma *Ground Structure* com 15 nós e 38 elementos, com uma carga pontual vertical de 1000N no nó 14 e com um volume inicial $V_T = 0.2231 \text{ m}^3$ como representado na Figura 5.1. O pretendido era minimizar o deslocamento do nó 14, tendo como variável de projeto a área da secção transversal dos 38 elementos e como constrangimentos o volume final da estrutura não ser maior do que 10% do inicial e a área da secção transversal dos elementos só podia variar no intervalo $[1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$.

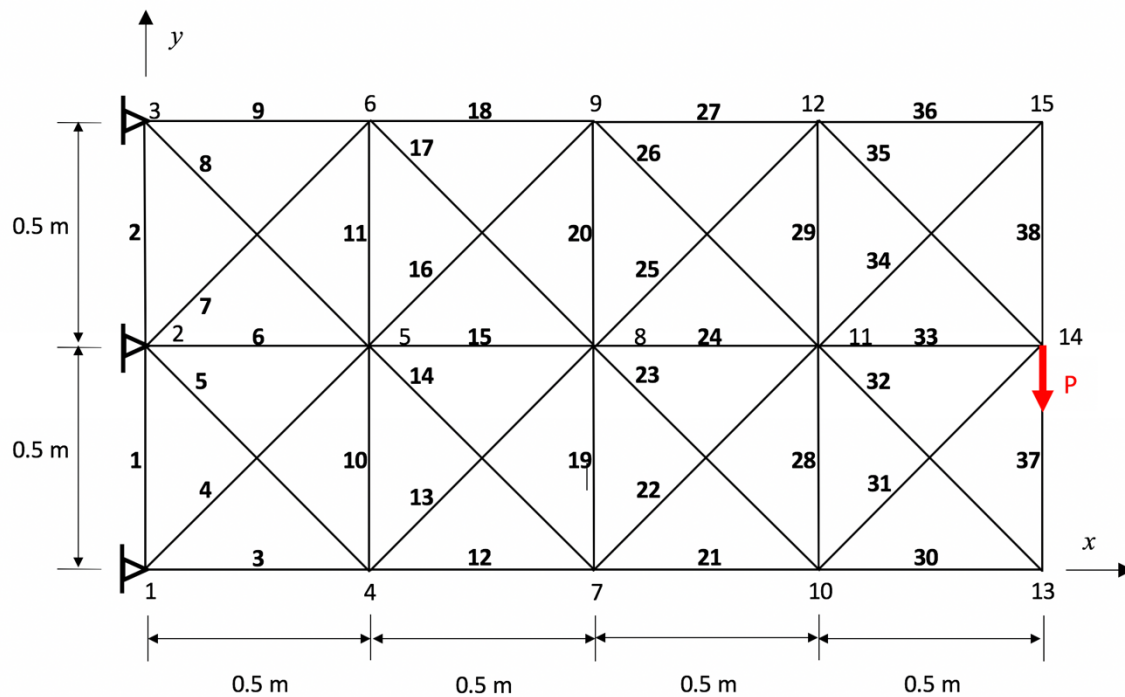


Figura 5.1-Ground Structure 1

Dados:

$$E = 210 \text{ GPa};$$

$$P = 1000 \text{ N};$$

$$A = 0.01 \text{ m}^2$$

O problema de otimização a tem formulação apresentada em 5.1:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & \delta_{y14} \\
 s. a \quad & V_F \leq (0.10 \times 0.2231) m^3 \\
 & 1 \times 10^{-8} m^2 < x_i < 1 \times 10^{-2} m^2 ; i = 1, \dots, n
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Realizou-se o problema de otimização tanto para análise linear como para análise não linear. Na Figura 5.2 está representada a estrutura otimizada após se realizar uma análise linear e na Figura 5.3 está representada a estrutura otimizada após se realizar uma análise não linear.

Valor da função objetivo:
 $\delta_{y14} = 1.366036168864 \times 10^{-5} m$

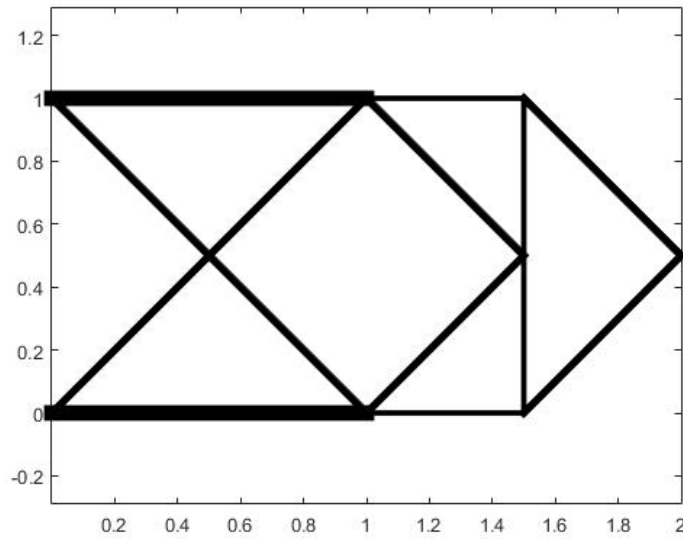


Figura 5.2-Estrutura 1 otimizada realizando uma análise linear

Valor da função objetivo:
 $\delta_{y14} = 1.926332541053 \times 10^{-5} m$

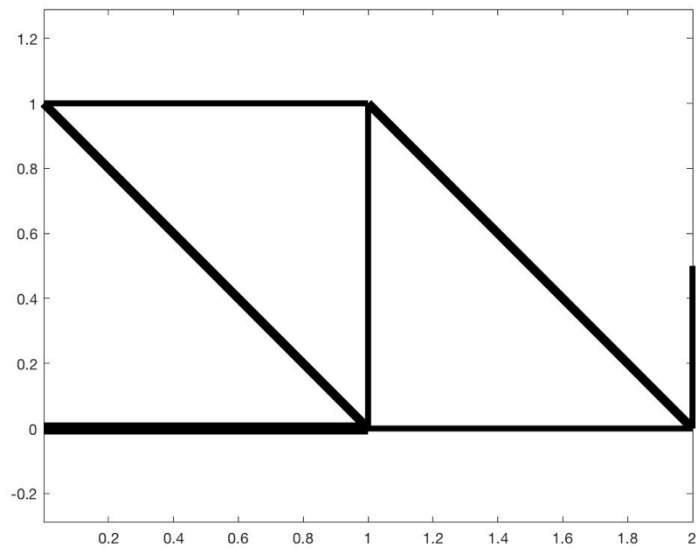


Figura 5.3-Estrutura 1 otimizada realizando uma análise não linear

Para a análise não linear a estrutura otimizada obtida foi bastante diferente como seria de esperar, porque os elementos que se encontram à compressão estão sujeitos ao fenómeno da encurvadura, como tal, a suas áreas serão diferente dos que se encontram à tração, o que não ocorreu na análise linear em que a estrutura é simétrica segundo o eixo horizontal, contudo em ambas as análises o valor do constrangimento encostou ao valor admitido. Os resultados das áreas otimizadas que apresentaram diferentes resultados entre as análises estão apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1-Áreas otimizadas da *Ground Structure 1*

	Análise linear	Análise não linear
Elemento	Área otimizada m ²	Área otimizada m ²
3	0.0042070	0.0046968
4	0.0019527	0.0000000
5	0.0000339	0.0000000
7	0.0000041	0.0000000
8	0.0019525	0.0033211
9	0.0041857	0.0023484
11	0.0000024	0.0000000
12	0.0041587	0.0046968
13	0.0000343	0.0000000
14	0.0019510	0.0033211
16	0.0019511	0.0000000
17	0.0000075	0.0000000
18	0.0041774	0.0023484
19	0.0000000	0.0023484
20	0.0000000	0.0023484
21	0.0013998	0.0023484
22	0.0019511	0.0000000
23	0.0000075	0.0000000
25	0.0000345	0.0000000
26	0.0019511	0.0033211
27	0.0014188	0.0000000
28	0.0013887	0.0000000
29	0.0013701	0.0000000
30	0.0000000	0.0023484
31	0.0019719	0.0000000
32	0.0000000	0.0033211
35	0.0019719	0.0000000
37	0.0000000	0.0023484

5.2. Exemplo 2

A segunda *Ground Structure* escolhida é idêntica à primeira exceto na posição dos apoios e o ponto de aplicação da carga como se apresenta na Figura 5.4. O pretendido era minimizar o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga variando as áreas da secção transversal dos 38 elementos no intervalo $[1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-2}] \text{ m}^2$ e como constrangimentos o volume final da estrutura não poderia ser maior do que 10% do inicial $V_T = 0.2231 \text{ m}^3$.

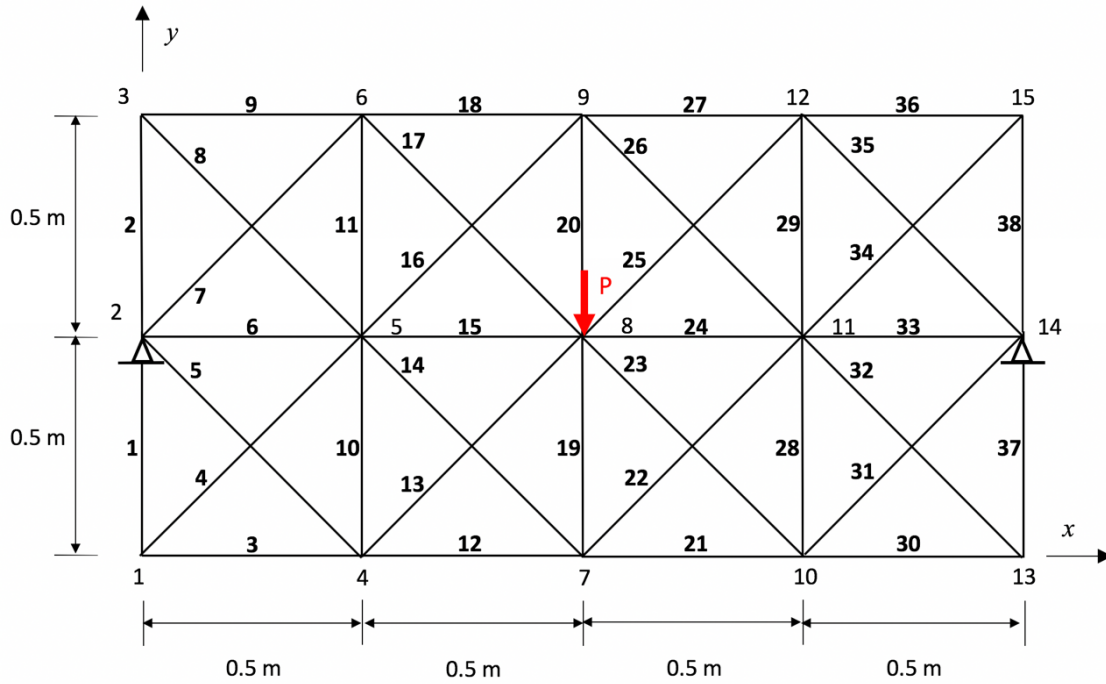


Figura 5.4-Ground Structure 2

Dados:

$$E = 210 \text{ GPa};$$

$$P = 1000 \text{ N};$$

$$A = 0.01 \text{ m}^2$$

O problema de otimização tem como formulação a apresentada em 5.2:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \delta_{y8} \\ \text{s. a} \quad & V_F \leq (0.10 \times 0.2231) \text{ m}^3 \\ & 1 \times 10^{-8} \text{ m}^2 < x_i < 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2 ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Em seguida representa-se a estrutura otimizada para uma análise linear na Figura 5.5 e a estrutura otimizada para uma análise não linear na Figura 5.6.

Valor da função objetivo:

$$\delta_{y8} = 1.920991579483 \times 10^{-6} m$$

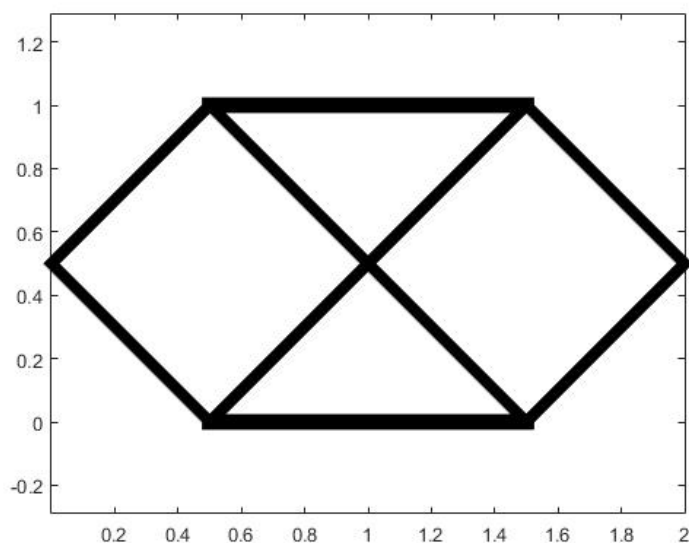


Figura 5.5-Estrutura 2 otimizada realizando uma análise linear

Valor da função objetivo:

$$\delta_{y8} = 3.415104789484 \times 10^{-6} m$$

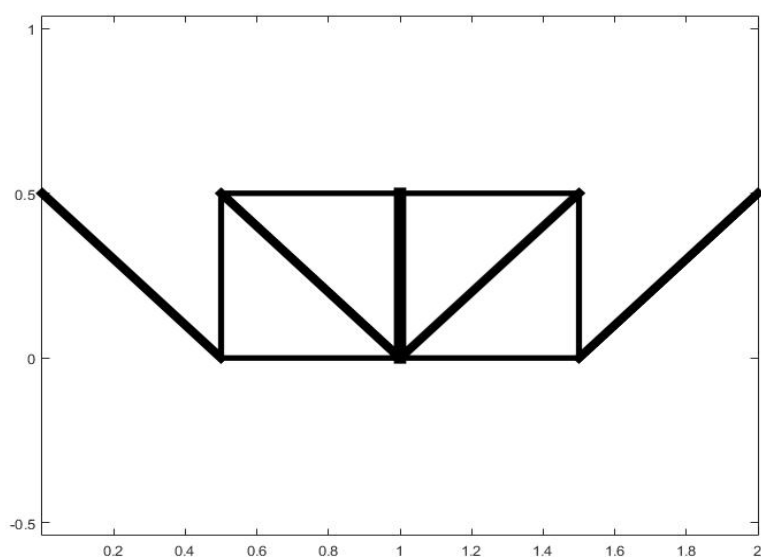


Figura 5.6-Estrutura 2 otimizada realizando uma análise não linear

Observando as figuras que retratam a estrutura 2 otimizada pelas duas análises, é possível notar que para a análise linear a estrutura apresenta-se novamente simétrica segundo o eixo horizontal e no ponto de aplicação da carga, os elementos que se encontram à compressão não são os que apresentam maior área o que é totalmente ao contrário do que acontece na análise não linear, isto é, os elementos que estão sujeitos à compressão apresentam maiores áreas de secção o que levou a descartar a parte superior da *Ground Structure*, porém em ambas as análises o valor do constrangimento encostou ao valor admitido. Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores das áreas otimizadas que diferem entre as análises.

Tabela 5.2-Áreas otimizadas da *Ground Structure 2*

	Análise linear	Análise não linear
Elemento	Área otimizada m ²	Área otimizada m ²
5	0.0026292	0.0039438
7	0.0026292	0.0000000
10	0.0000000	0.0027887
12	0.0037183	0.0027887
13	0.0026292	0.0000000
14	0.0000000	0.0039438
15	0.0000000	0.0027887
17	0.0026292	0.0000000
18	0.0037183	0.0000000
19	0.0000000	0.0055774
21	0.0037183	0.0027887
22	0.0000000	0.0039438
23	0.0026292	0.0000000
24	0.0000000	0.0027887
25	0.0026292	0.0000000
27	0.0037183	0.0000000
28	0.0000000	0.0027887
31	0.0026292	0.0039438
35	0.0026292	0.0000000

Como dito anteriormente se verificarmos na Tabela 5.2 os elementos que apresentam uma maior área na análise linear são os elementos 12, 18, 21 e 27. Os elementos 12 e 21 estão sujeitos à tração enquanto os elementos 18 e 27 estão sujeitas à compressão. Na análise não linear o que apresenta maior área é o 19 porque é o que está sujeito a forças de compressão mais elevadas porque o carregamento é aplicado diretamente sobre o mesmo.

5.3. Exemplo 3

Para este último exemplo escolheu-se uma *Ground Structure* um pouco mais complexa, representada na Figura 5.7 composta por 144 elementos e 49 nós. Aplicou-se uma carga pontual no nó 21 com um valor de 50KN, as variáveis de projeto foram as áreas de secção dos 144 elementos podendo apenas variarem no intervalo $[1 \times 10^{-8}, 1 \times 10^{-2}]$ m² e o constrangimento foi que a estrutura final não poderia apresentar um valor de volume total maior que 10% do valor total inicial $V_T = 0.8525$ m³.

Dados:

$$E = 210 \text{ GPa};$$

$$P = 50 \text{ kN};$$

$$A = 0.01 \text{ m}^2$$

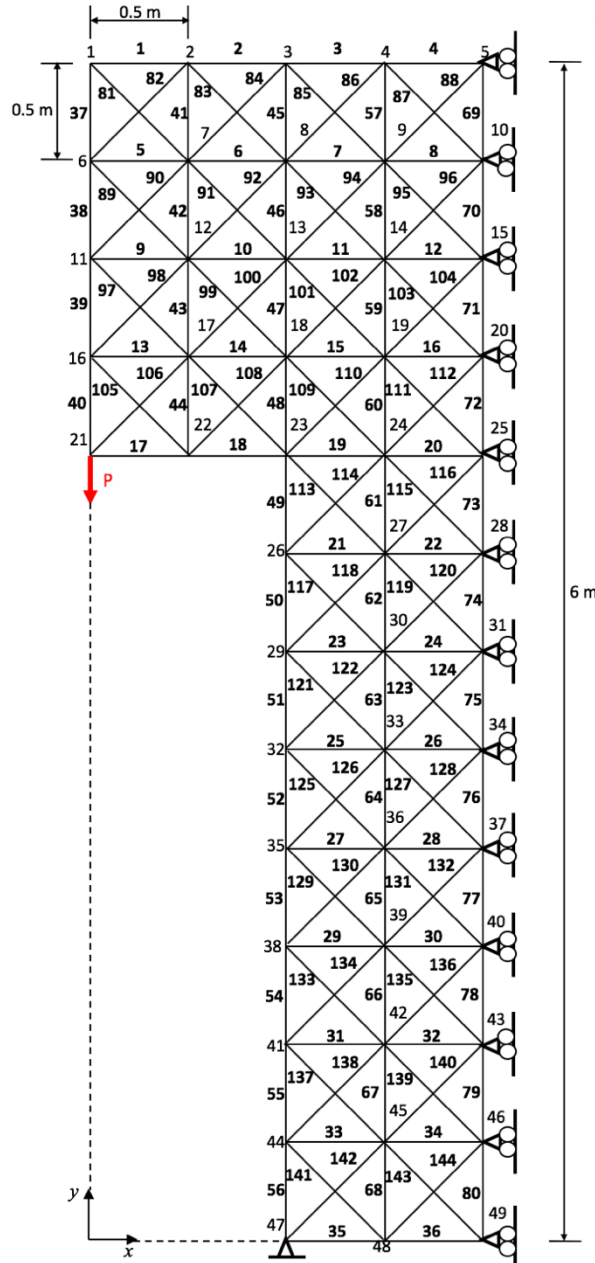


Figura 5.7-Ground Structure 3

O problema de otimização apresenta a formulação 5.3:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \delta_{y21} \\ \text{s. a} \quad & V_F \leq (0.10 \times 0.8225) m^3 \\ & 1 \times 10^{-8} m^2 < x_i < 1 \times 10^{-2} m^2 ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{5.3}$$

Após se realizar a otimização da mesma para a análise linear obteve-se a estrutura representada na Figura 5.8 e para a análise não linear a representada na Figura 5.9.

O valor da função objetivo para a análise linear obtido foi:

$$\delta_{y21} = 2.262754234319 \times 10^{-4} m$$

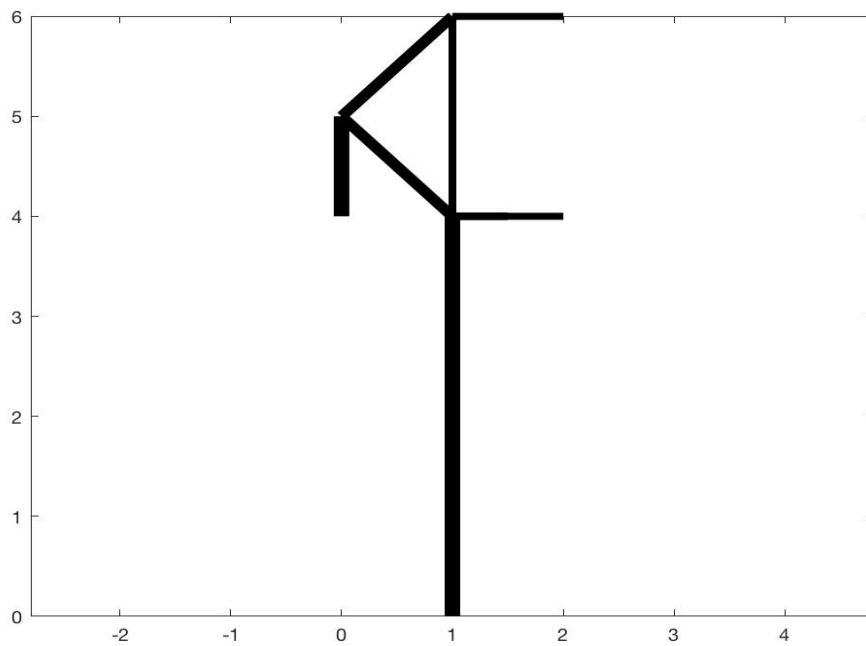


Figura 5.8-Estrutura 3 otimizada realizando uma análise linear

O valor da função objetivo para a análise não linear obtido foi:

$$\delta_{y21} = 2.434603810643 \times 10^{-4} m$$

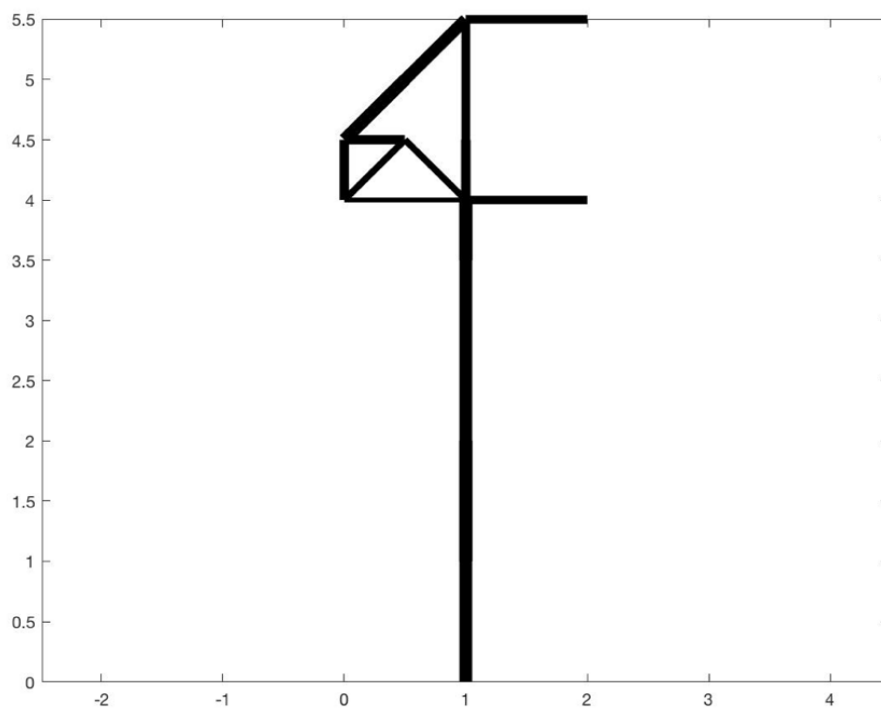


Figura 5.9-Estrutura 3 otimizada realizando uma análise não linear

Em seguida apresenta-se apenas os valores das áreas otimizadas para ambas as análises na Tabela 5.3 que apresentam diferenças.

Tabela 5.3-Áreas otimizadas da *Ground Structure 3*

Análise linear			Análise não linear		
Elemento	Área otimizada m ²	Área otimizada m ²	Elemento	Área otimizada m ²	Área otimizada m ²
2	0.0000003	0.0000000	55	0.0095228	0.0086823
3	0.0047546	0.0000000	56	0.0094057	0.0089890
4	0.0047449	0.0000000	57	0.0000001	0.0000000
6	0.0000005	0.0000000	58	0.0000006	0.0000000
7	0.0000011	0.0060209	59	0.0000003	0.0000000
8	0.0000013	0.0060822	62	0.0000006	0.0000000
10	0.0000008	0.0000000	63	0.0000008	0.0000000
11	0.0000020	0.0000000	64	0.0000009	0.0000000
13	0.0000006	0.0062250	65	0.0000006	0.0000000
14	0.0000022	0.0000000	66	0.0000005	0.0000000
15	0.0000004	0.0000000	67	0.0000002	0.0000000
17	0.0000006	0.0029818	76	0.0000001	0.0000000
18	0.0000048	0.0032022	82	0.0000002	0.0000000
19	0.0047690	0.0061302	83	0.0000000	0.0000062
20	0.0047477	0.0060923	84	0.0067073	0.0000000
22	0.0000007	0.0000000	86	0.0000007	0.0000000
30	0.0000001	0.0000000	89	0.0000003	0.0000000
31	0.0000001	0.0000000	90	0.0066937	0.0000000
32	0.0000146	0.0000000	91	0.0000006	0.0000000
33	0.0000003	0.0000000	92	0.0000013	0.0084920
34	0.0000003	0.0000000	93	0.0000003	0.0000000
38	0.0000004	0.0000000	97	0.0066930	0.0000000
39	0.0094746	0.0000000	98	0.0000014	0.0086190
40	0.0094495	0.0062297	99	0.0000005	0.0000000
41	0.0000003	0.0000000	105	0.0000013	0.0000000
44	0.0000001	0.0000000	106	0.0000004	0.0044250
45	0.0046633	0.0000000	107	0.0066911	0.0043441
46	0.0047242	0.0058119	108	0.0000013	0.0000000
47	0.0046903	0.0061415	110	0.0000006	0.0000000
48	0.0046910	0.0063863	113	0.0000009	0.0000000
49	0.0094925	0.0091012	115	0.0000001	0.0000000
50	0.0095370	0.0089830	128	0.0000001	0.0000000
51	0.0094542	0.0089434	134	0.0000001	0.0000000
52	0.0094884	0.0089922	137	0.0000001	0.0000000
53	0.0094843	0.0094098	138	0.0000001	0.0000000
54	0.0094697	0.0094838	142	0.0000003	0.0000000

Observando a Figura 5.8 e Figura 5.9 é de notar que ambas as análises apresentaram estruturas otimizadas semelhantes, contudo na análise não linear a topologia obtida na zona das barras que estavam sujeitas a carregamentos de compressão mais elevados apresentou um maior número de barras porque o algoritmo substituiu uma barra de comprimento elevado sujeito à

compressão por um conjunto de barras de menor comprimento, pois apresentam uma maior resistência, contudo em ambas as análises o valor do constrangimento encostou ao valor admitido.

6. Conclusões e sugestões de desenvolvimentos futuros

O principal objetivo da presente dissertação era a criação de um método de penalizar a excessiva esbeltez das barras, utilizando como base teórica os métodos desenvolvidos por Euler que permitiam estudar estruturas que falhavam devido à encurvadura. Como as curvas de dimensionamento do Eurocódigo 3 apresentavam uma excelente aproximação à curva de Euler foi implementado no PROAES_Barra2D um fator determinante apresentado na norma de dimensionamento de colunas apresentado no Eurocódigo 3, o fator de redução χ , que por sua vez foi implementado na matriz de rigidez do elemento porque a encurvadura segue um comportamento não linear e na resolução de estes problemas é necessário ter em conta que a matriz de rigidez do elemento varia em função do deslocamento.

O PROAES_Barra2D permite assim a realização de problemas de otimização de treliças em duas dimensões, executando análises lineares ou análises não lineares conforme o utilizador deseje.

No exemplo de verificação para averiguar se o PROAES_Barra2D estaria a realizar corretamente os cálculos de sensibilidades utilizou-se a análise de sensibilidades que demonstrou que o PROAES_Barra2D apresentava erros de 0.09% e 0.04% para a análise linear e para a análise não linear respetivamente. No entanto, ocorreram problemas quando se tentou adicionar mais barras o que não foi bem-sucedido, porque o PROAES_Barra2D apresentava erros no cálculo das sensibilidades elevados ao realizar uma análise não linear. Portanto com este pequeno problema foi necessário definir na *optimtool* que o próprio MATLAB calcularia as sensibilidades.

Os resultados obtidos de otimização apresentam diferenças entre a realização de uma análise linear e uma não linear o que demonstra o interesse da abordagem realizada.

Nos dois primeiros exemplos as estruturas otimizadas linearmente apresentaram uma simetrias, isto é, tornaram-se simétricas em relação ao eixo de simetria horizontal, como tal, não existem diferenças nas áreas dos elementos que se encontram à compressão e à tração o que não é correto a nível prático, no entanto para a análise não linear o mesmo já não acontece, ou seja, as estruturas otimizadas não apresentam simetria e as áreas que apresentam maiores valores são as dos elementos à compressão, o que é o correto.

Relativamente aos valores da função objetivo para uma análise linear o valor é inferior ao da análise não linear porque um deslocamento não linear apresenta uma rigidez menor.

No terceiro exemplo a topologia otimizada linearmente e não linearmente não apresentam uma diferença tão obvia como nos dois primeiros. Contudo os valores das áreas dos elementos dos elementos à compressão são mais elevados na análise não linear do que na análise linear.

Assim conclui-se que o método criado é um excelente método para penalizar a encurvadura e apresenta resultados com interesse prático.

Ao não ter conseguido colocar o PROAES_Barra2D a realizar o correto cálculo das sensibilidades para mais do que um elemento, proponho como um trabalho futuro a correção das sensibilidades para que seja possível o próprio PROAES_Barra2D calcular as sensibilidades e assim reduzir o tempo necessário para realizar um problema de otimização.

Utilizar o método desenvolvido para otimizar estruturas recorrendo a diferentes algoritmos.

Por fim como última sugestão, sugere-se que se aplique este método, mas realizando uma otimização utilizando múltiplos materiais, isto porque a topologia pode variar mas também o custo do projeto da mesma pode ser inferior relativamente a uma estrutura composta apenas por um material, por exemplo as barras que se encontrem à compressão sejam composta por um material com um custo mais relativamente às que se encontram à tração.

7. Referências Bibliográficas

- [1] W. Achtziger, “Local stability of trusses in the context of topology optimization”, *Struct. Optim.*, vol. 17, pp. 235–246, 1999.
- [2] M. R. Corrêa, “Introdução ao comportamento não linear de estruturas”, *Apontamentos da Discip. Resist. Mater. 2, IST*, pp. 3–4, 2015.
- [3] T. Buhl, C. B. W. Pedersen, and O. Sigmund, “Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 19, pp. 93–104, 2000.
- [4] W. M. C. McKenzie, “*Design of Structural Elements*”, Great Britain: Palgrave Macmilan, 2004.
- [5] H. Cui, H. An, and H. Huang, “Truss topology optimization considering local buckling constraints and restrictions on intersection and overlap of bar members”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, 2018.
- [6] L. Li and K. Khandelwal, “Topology optimization of geometrically nonlinear trusses with spurious eigenmodes control”, *Eng. Struct.*, vol. 131, pp. 324–344, 2017.
- [7] G. I. N. Rozvany, “Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints”, *Struct. Optim.*, vol. 11, pp. 213–217, 1996.
- [8] M. Zhou, “Difficulties in truss topology optimization with stress and local buckling constraints”, *Struct. Optim.*, vol. 11, pp. 134–136, 1996.
- [9] A. Ben-tal, “Optimal Design of Trusses Under a Nonconvex Global Buckling Constraint”, *Optim. Eng.*, vol. 1, pp. 189–213, 2000.
- [10] M. Kocvara, “On the modelling and solving of the truss design problem with global stability constraints”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 23, pp. 189–203, 2002.
- [11] E. Lindgaard and E. Lund, “Nonlinear buckling optimization of composite structures”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 37–40, pp. 2319–2330, 2010.
- [12] T. HAGISHITA and M. OHSAKI, “Topology Mining for Optimization of Framed Structures”, *J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf.*, vol. 2, no. 3, pp. 417–428, 2008.
- [13] X. Zhang, A. S. Ramos Jr, and G. H. Paulino, “Material nonlinear topology optimization using the ground”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 55, pp. 2045–2072, 2017.
- [14] J. J. G. Peláez and A. Paz, “Estado del Arte de la Optimization Estructural”, 2018.
- [15] S. S. Caballero, “Optimización estructural y topológica de estructuras morfológicamente no definidas mediante algoritmos genéticos”, Universitat Politècnica de València, 2012.
- [16] P. Coelho, “Tópicos avançados em mecânica estrutural (Optimização Estructural)”, *Apontamentos da Discip. Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural, FCT/UNL*, 2018.
- [17] P. Coelho, “Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural (Optimização Topológica)”, *Apontamentos da Discip. Tópicos Avançados em Mecânica Estrutural, FCT/UNL*, 2017.

- [18] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, “*Topology optimization: theory, methods, and applications*”, vol. 2. Germany: Springer, 2003.
- [19] A. F. A. Teixeira, “Otimização de topologia de treliças considerando incerteza”, *Diss. Mestr. FCT/UNL*, 2017.
- [20] B. A. R. Cardoso, “Optimização topológica robusta aplicada a treliças 2D e 3D”, *Diss. Mestr. FCT/UNL*, 2018.
- [21] R. A. de C. Leal, “Comparação entre um método aproximado e um método numérico para cálculo de deformações em treliças e otimização dessas estruturas”, *Diss. Mestr. FCT/UNL*, 2015.
- [22] J. M. N. Marmeleiro, “PROAES – Programa de análise de estruturas para aplicação em otimização e análise de fiabilidade”, *Diss. Mestr. FCT/UNL*, 2017.
- [23] J. B. Cardoso, “Estabilidade de Colunas”, *Apontamentos da Discip. Mecânica dos Sólidos 2, FTC/UNL*, 2019.
- [24] J. B. Cardoso, “Métodos computacionais em engenharia mecânica”, *Apontamentos da Discip. Métodos Comput. em Eng. Mecânica, FCT/UNL*, 2019.